Nachrichten

über das

Königl. Friedrichs-Gymnasium zu Gumbinnen

aus dem Schuljahre
von Michaelis 1826 bis Michaelis 1827,

womit zu

der öffentlichen Prüfung,

welche

am 28sten und 29sten September d. J.

gehalten werden wird,

die resp. Eltern der Zöglinge, wie auch alle Gönner und Freunde des Schulwesens,

im Namen der Anstalt ehrerbietigst und ergebenst einladet

J. D. Prang,
Direktor.

Angehängt ist eine Abhandlung des Oberlehrers Sperling über unmögliche Größen.

Gumbinnen, 1827.
Gedruckt bei C. W. Meltzer.

Schulnachrichten

von Michaelis 1826 bis dahin 1827.

A. Allgemeine Lehrverfassung.

I. Lehrgegenstände nach den Klassen, Lehrbücher, wöchentliche Stundenzahl.

Prima.

Ordinarius: der Direktor.

1. Lateinisch in 9 Stunden, nämlich 3 St. Cic. de fin. I. II. und III. init. Hr. O.L. Petrenz. — 2 St. Tacit. Annal. l. IV., Dir. — 2 St. Terent. Andria und Horat. Od. l. I. mit Auslassung einiger. Der Vortrag gewöhnlich lat. Hr. O.L. Petrenz. — 2 St. Stilübungen in freien Aufsätzen, häuslichen Exerzitien nach Dörings Anleit. 4r Ks. und Extemporalien. Derselbe.

2. Griechisch in 7 Stunden. Davon 3 St. Demosth. Phil. I., Olynth. I—III, de pace und die R. in Midiam zur Hälfte. Hr. O.L. Petrenz. — 2 St. Sophocles Antigon. und Ajax. Bis zum 1. Jul. derselbe, später Hr. O.L. Dr. Hamann. — 1 St. Exerzitien nach Günthers Anleit. 2r Ks. Hr. O.L. Petrenz. — 1 St. Hom. Il. XIX—XXI kursorisch (ohne schriftliche Uebersetz.) Theocr. Id. 1. 3. 6—8. Derselbe.

3. Hebräisch in 2 Stunden, nach Gesenius Grammat. und Leseb. Die Lehre vom Nomen wiederholt, und die Forennlehre beendigt. Richt. 13—16, die in das Lesebuch aufgenommenen Psalmen, die Abschnitte aus d. B. Hiob und aus Jesaia ins Lat. übersetzt und erläutert. — Exerzitien nach Schröders Uebungsbuche, und Uebungen im Lesen und Vokalisiren unpunktirter Stücke. Direktor.

4. Deutsch bis zur Vakanz der 3ten Oberlehrerstelle in 2 Stunden, später bis zum Jul. in 1 St., seitdem wieder in 2 St.; davon 1 St. deutsche Literaturgesch. und 1 St. Stilübungen. Bis zum 20. Januar d. O.L. Lünemann, später bis zum Jul. Hr. O.L. Sperling, zuletzt Hr. O.L. Dr. Hamann.

5. Logik in 2 St., jedoch erst seit dem 12. Febr.; denn bis dahin mußte diese Lektion der Vakanz wegen ausgesetzt werden. Die Lehre von den Begriffen, nach Reimarus. Hr. O.L. Sperling.

6. Geschichte, nach Pölitz, in 3 St. Mittelalter. Bis zum 20. Jan. O.L. Lünemann, später bis zum 1. Jul. Dir., seitdem Hr. O.L. Dr. Hamann.

7. Geographie nach Stein in 1 St. Bis zum 20. Jan. O.L. Lünemann, und seit Jul. d. J. Hr. O.L. Dr. Hamann. Afrika und Mittel-Europa.

8. Mathematik, nach Matthias Leitf. (bisher noch 3e Aufl.) seit dem 12. Febr. in 6 Stunden; die Arithmetik fast vom Anfange an, die Algebra und ebene Trigonometrie (mit Ergänzungen zum Lehrbuche) wiederholt. Sphärische Trigonometrie. Alle 2 bis 3 Wochen eine schriftliche Ausarbeitung geliefert und vom Lehrer verbessert. Hr. O.L. Sperling.

9. Physik in 2 St. nach Kries Lehrb. d. Ph. Optik, Perspektive, Katoptrik und Anfang der Dioptrik. Bis zum 20. Jan. O.L. Lünemann, später Hr. O.L. Sperling.

10. Religionsunterricht in 2 St. nach Niemeyer. Systemat. Unterricht in der Sittenlehre nach dem 3ten Abschn. des Lehrbuchs. Hierauf 3r und 4r Abschn. d. Religionslehre, der die positiven Glaubenslehren des Christenthums enthält. Direktor.

11. Gesangunterricht mit den Sekundanern und allen, die sich für die obere Abtheilung eignen. Bis zum 20. Jan. O.L. Lünemann, später Hr. Kantor Hermes.

Secunda.

Ordinarius: Herr O.L. Petrenz.

1. Latein, bis zum 12. Februar in 13, später in 11 St., davon 2 St. Syntaxis ornata nach Zumpts gr. Gramm. (bis zum 12. Februar kombinirt mit I.) Herr O.L. Petrenz, später bis zum Juli Herr Dr. Merleker, seitdem Herr O.L. Dr. Hamann. — 2 St. Stilübungen nach Webers Uebungssch., in diktirten Exerzitien, Extemporalien und für die ältern Schüler auch in freien Aufsätzen histor. Inhalts. Bis zum 20. Jan. O.L. Lünemann, später bis zum Jul. Hr. Dr. Merleker, seitdem Hr. O.L. Dr. Hamann. — 3 St. Liv. lib. II und XXI. (bis z. 12. Febr. komb. mit I.) Hr. O.L. Petrenz. — 2 St. Cic. pro Dejot. und Philipp. II. bis z. 20. Jan. O.L. Lünemann, später bis zum Jul. Hr. Dr. Merleker, zuletzt Hr. O.L. Dr. Hamann. — Bis z. 12. Febr. 4 St., später 2 St. Virg. Aen. II. III und VII init. Dir. Der Vortrag im Cic. und Virg. vom Febr. ab meistens lat.

2. Griechisch in 7 St., davon 3 St. Xenoph. Cyrop. I. II. Hr. O.L. Petrenz; 2 St. Hom. Il. XI.—XIV. Bis z. 20. Jan. O.L. Lünemann, später Hr. Dr.

Merleker. — 2 St. Syntax nach Matthias Schulgramm., von den Modis bis zu Ende, und Exerzitien nach Rost's und Wüstem. Anleitung 2r Thl. 4r Ks., mitunter auch aus alten Schriftstellern diktirt. Bis z. Febr. Hr. O.L. Petrenz, später Hr. Dr. Merleker.

3. Hebräisch (auch mit Tertianern) in 2 St. die Lehre vom regelmäßigen Verbo wiederholt, Verba mit Gutturalen, mit Suffixis, das unregelm. Verb., nebst schriftl. Uebungen, nach Gesenius. Prosaische Abschnitte aus dem Lesebuche von Gesenius ins Lat. übersetzt, und zur Einprägung des grammat. Unterrichts benutzt. Dir.

4. Deutsch in 2 St., wovon 1 St. Rhetorik, nach Heinsius Teut 3r Theil, und 1 St. Stilübungen. Redeübungen. Hr. Küßner.

5. Geschichte in 3 St. Alte Gesch. nach Bredow's Handb. bis auf Alexander d. Gr. Bis z. 20. Jan. O.L. Lünemann, darauf bis z. Jul. Hr. Dr. Merleker, seitdem Hr. O.L. Dr. Hamann.

6. Geographie: 1 St. nach Stein. Südindien nebst den Inseln, Süd- und Mittel-Europa. Die Lehrer, wie in der Gesch.

7. Mathematik bis z. 20. Jan. 2 St. O.L. Lünemann; vom 12. Febr. wieder in 4 St. Hr. O.L. Sperling. Theorie der Logarithmen; Anweisung und Uebung im Gebrauche der einfachen Logarithmen, und der logarithmisch-trigonometr. Tafeln, nach Vega; ebene Trigonometrie (nach Diktaten des Lehrers). Häusl. Ausarbeitungen, wie in I.

8. Physik, nach Kries Lehrb., in 2 St. Besondere Naturlehre, mit Ausschluß der Optik und Chemie. Bis z. Juli Hr. Lehmann, später Hr. O.L. Sperling.

9. Religionsunterricht, in 2 St. nach Niemeyer's Lehrb. Die Einleit. in d. H. S. Bis z. Febr. Dir., später bis z. Jul. Hr. Lehmann, zuletzt wieder Dir.

10. Gesangunterricht. S. unter I.

Tertia.

Ordinarius: Herr Lehmann.

1. Latein in 8 St., davon 2 St. Syntax nach der Schulgr. v. O. Schulz; im letzten Quartal 1 St. davon zu Extemporalien. — 2 St. Exerzitien nach Strack's Anleit. — 2 St. Caes. de bell. civil. l. III. Hr. Lehmann. — 2 St. Ovid. Met. nach

dem Auszuge von Seidel l. VII.—XI. Bis z. Jul. Hr. Lucks, seitdem Hr. O.L. Petrenz. — Wöchentlich 4 Seiten aus Schellers W. B. gelernt und abgefragt.

2. Griechisch, bis z. Febr. in 9, später in 7 St. Davon 3, später 2 St. Jacobs El. B. 2r Ks. Die Abschnitte a. d. Nat. Gesch. und Mythologie. Von Johannis ab wurde in 1 dieser 2 St. Xenoph. Hellen. I. 1—3 gelesen. Hr. Dr. Merleker. — 3 St. Hom. Od. I—III. Vorangeschickt die Hom. Formenlehre, und der metrische Unterricht von IV. durch d. Lehre v. Hexameter und Pentameter fortgeführt. Hr. Lucks. — 2) vom 12. Febr. ab 1 St. Gramm. Die Formenlehre nach Buttmann wiederholt, und dann die Partikeln u. d. Wortbildung; aus der Syntax die Rektionslehre. — 1 St. Exerzitien nach Rost's und W.'s. Anleit. 1r Thl. 2r Ks. Hr. Dr. Merleker.

3. Hebräisch. S. bei II.

4. Deutsch in 3 St. Davon 2 St. Lesung von Abschnitten aus Musterschriften, nach Wilmsens Lesestücken, mit durchgängiger Rücksicht auf logische Anordnung. — 1 St. prakt. Stilübungen, worauf bisweilen auch 1 von den Lesestunden verwendet wurde. Jeder Tertianer deklamirte monatlich einmal. Hr. Lehmann.

5. Geschichte in 3 St. nach Pölitz kl. Weltgesch. Alte Gesch. (die griech. und römische ausführlicher, als im Leseb.) dann das Mittelalter bis 1273. Hr Dr. Merleker.

6. Geographie in 1 St. nach Stein. Asien, Amerika, Australien und von Europa der preuß. Staat und Deutschland. Ders.

7. Mathematik, nach Matthias, bis z. Febr. in 4 St. Hr. Lehmann, später 6 St. Hr. O.L. Sperling. Aus der Arithm.: Berechnung der Kubikzahlen, Ausziehen der Kubikwurzel, Rechnung mit Wurzelgrößen, die arithm. und geometr. Proportionen; aus der Algebra: Theorie der einfachen Gleichungen mit Ergänzungen zum Lehrb., quadratische Gleichungen (gleichfalls etwas ausführlicher als nach d. Leitf.) — Vielfältige Uebungen nach Meier Hirsch. — Aus der Geometrie: Abschn. V, Abth. 3 und Abschn. VI. bis zur Stereometrie. — Häusliche Arbeiten wie bei I.

8. Naturwissenschaften in 2 St. Bis Weihnachten angewandte Naturlehre, nach Kries Lehrb. für Anfänger; später Botanik. Hr. Lehmann.

9. Religionsunterricht in 2 St. Wiederholung der 5 Hauptstücke des luth. Katechismus nebst Erklärung. Hierauf ein zusammenhängender Vortrag der Glaubens- und Sittenlehre, nach eigenen Heften des Lehrers. Memoriren der Beweisstellen. Ders.

10. Kalligraphie in 2 St. nach Hennings größern Vorschriften. Hr. Brunkow.

11. Gesangunterricht. S. bei I.

Quarta.

Bis zum 30. Jan. und wieder vom Jul. bis Michaelis v. J. in 2 Abtheil. getheilt, die nur in der Religion (fast die Hälfte der Schüler genießt den gleichzeitigen Konfirmandenunterricht), Geschichte, Naturbeschreibung, deutschen Lesung, Kalligraphie und im Zeichnen kombinirt waren; allein in der Zwischenzeit mußten beide Cötus, der Vakanzen wegen, bis auf die 2 geometr. und 2 geograph. Stunden, worin sie stets getrennt blieben, verbunden werden. In dieser Zeit versah Herr Lucks das Ordinariat beider Cötus; während der Trennung war er Ordinarius der Abth. A. und Hr. Dr. Merleker der Abth. B.

1. Latein in 8 St. Davon 2 St. Jacobs und Dörings Elementarbuch 1s Bdch. die Abschn. aus der röm. Gesch. 1—6s Buch. — 2 St. Phaedr. fab. lib. II-IV. mit einigen Auslassungen. Vorangeschickt die Quantitätslehre, und was zur Messung der Verse des Phädr. aus der Metrik erforderlich ist. Interessantere Fabeln memorirt. — 2 St. Grammatik nach O. Schulz. Die Formenlehre wiederholt, dann die Etymologie, die Syntaxis convenientiae. und casuum. Vom 30. Jun. bis. z. Jul. Hr. Lucks, in der übrigen Zeit Hr. Dr. Merleker. — 2 St. Exerzitien nach den Vorübungen von F. Schulze. Bis z. 30. Jun. Hr. Dr. Merleker, später bis z. Jul. in beiden Abth. Herr Küßner, seitdem in A. derselbe, in B. Herr Dr. Merleker.

2. Griechisch in 6 Stunden Davon 2 St. Grammatik nach Buttmann. Die Formenlehre bis zum Verbo (das Pensum der V.) wiederholt, mit Hinzunehmen des Anomalischen, dann bis §. 114. incl. fortgeführt. — 1 St. Jacobs El. B. 1r Ks v. VI bis zu Ende mit einigen Auslassungen. — 1 St. Exerzitien nach Rosts ꝛc. Anleitung 1r Ks. Herr Lucks.

3. Deutsch in 3 St. Davon in 1 St. zunächst die Wortfügung nach Heinsius kl. Sprachlehre wiederholt und beendigt; hierauf Verskunst, nach Gottholds Hephästion, ganz durchgenommen und wiederholt. — 1 St. Lesung, nach Heinsius Musen 2r Th. nebst Deklamiren. — 1 St. Aufsätze. Herr Lucks.

4. Geschichte in 2 St., nach Bredows merkw. Begebenh., ganz, mit Ergänzungen des Pensums der V, besonders biographischen. Herr Brunkow.

5. Geographie in 3 St. nach Stein. Abriß der math. und phys. Geogr.; dann die Länder Europa's, die asiat. Türkei und das asiat. Rußland. Kartenzeichnen. Derselbe.

6. Mathematik in 6 Stunden, nach Matthias. Davon 4 St. allg. Größenlehre; von den Vorbegriffen bis zur Ausziehung der Kubikwurzel excl. Herr Mauerhoff. — 2 St. Geometrie. Planimetrie', Abschn. 4. und 5. d. L. B. Herr Küßner.

7. Systemat. Naturbeschreibung in 2 St. nach Funke's 3m Leitf. mit den nöthigen Verbesserungen, als Ergebnissen neuerer Forschung. Mineralogie, Zoologie und die Lehre vom menschlichen Körper. Herr Lehmann.

8. Religionsunterricht in 2 St. Kurze Einleit. in d. h. S. nach Krummachers Bibelkatechismus; Abriß der Religionsgesch. nach Dinters Religonsgesch. f. Volksschulen; endlich Lesung und erbauliche Erläuterung ausgewählter Abschnitte des N. T., hauptsächlich über das Leben Jesu. Beweisstellen memorirt. Herr Küßner.

9. Kalligraphie 2 St. nach Hennings Vorschr. 2s Heft. Herr Brunkow.

10. Zeichnen 2 St. nach Korffs Vorlegebl. 3s Heft und größern. Derselbe.

11. Gesangunterricht. S. bei I.

Quinta.

Ordinarius: Herr Brunkow.

1. Latein in 7 Stunden. Davon 3 Stunden Grammatik nach O. Schulz. Die regelmäßige Formenlehre wiederholt, die anomalische hinzu genommen, und die ganze F. L. beendigt; das Verzeichniß der im Perf. und Sup. abweichenden Verben, desgl. die Uebungsbeispiele und die Vokabeln aus den Regeln memorirt. Schriftliche Uebungen im Konjugiren. — 1 St. Exerzitien nach Speccii Praxis etc. von Esmarch, mündlich und schriftlich. — 3 St. Reuß Elementarüb. 1r Ks. übersetzt (auch schriftlich) und zur Uebung im Konstruiren, wie auch zur Einprägung der F. L. benutzt. Sentenzen daraus memorirt. Herr Küßner.

2. Griechisch in 2 St. Vorbereitender Unterricht. Grammatik, nach Buttmann, von der Buchstabenkenntniß bis zum Verbo excl. — Jacobs Elem. B. 1r Ks. zu Leseübungen, später zu den ersten Konstruktions- und Uebersetzungsübungen, wie auch zur Einprägung der F. L. Abschn. I—V. — Bis z. 12. Febr. Hr. Lehmann, später bis z. Jul. Hr. Dr. Merleker, seitdem Hr. O.L. Dr. Hamann.

3. Deutsch in 5 St. Davon 1 St. Grammatik, nach Heinsius kl. Sprachlehre, Wortforschung und Wortfügung, beendigt. — 1 St. Orthographie und Interpunktionslehre theoret. und prakt., auch mit schriftl. Ueb. — 1 St. Aufsätze nach einer natürlichen Stufenfolge bis zu Briefen aus dem Gedankenkreise der Schüler. Bis zum Febr.

Hr.

Hr. Dr. Merleker, später Hr. Brunkow. — 2 St. ausdrucksvolles Lesen und Deklamiren, nach Heinsius Musen 1r Thl. Herr Lucks.

4. Religionsunterricht 2 St. Gesch. und Lehren d. h. S. N. T. nach Kohlrausch; hierauf die 5 Hauptstücke des luth. Katechismus, nach Dinters kurzgef. Glaubens- und Sittenlehre ꝛc., erläutert und memorirt. Memoriren der Bibelsprüche und Liederverse aus beiden Lehrbüchern. Herr Lucks.

5. Geschichte 2 St. nach Bredows merkw. Begebenh. und dessen 3 Tabellen. Ueberblick der ganzen Gesch. Herr Brunkow.

6. Geographie 1 St. nach Weißens kurzem Unterricht in der Erdbeschr. Der preuß. Staat (ausführlicher als in VI.), die Länder und wichtigsten Inseln aller Erdtheile. — Landkartenzeichnen. Derselbe.

7. Mathematik 6 St. Davon 4 St. theils Kopf- theils Tafelrechnen. Die Bruchrechnung wiederholt und beendigt; hierauf die einfachen und zusammengesetzten Verhältnißrechnungen. — 2 St. Geometrie nach Matthias Leitf. §. 1—84. Hr. Mauerhoff.

8. Naturbeschreibung in 2 St. nach Funke's 2m Leitf. Genauere Kenntniß der einzelnen Theile und Gestalten der Körper, als Vorbereitung auf den systemat. Unterricht in IV. Herr Lehmann.

9. Kalligraphie in 3 St. nach Hennings Vorschriften. Herr Brunkow.

10. Zeichnen in 3 St. nach Korffs Vorlegeblättern. Derselbe.

11. Gesangunterricht in 2 St. (auch für Sextaner). Die Lehre von den ganzen und halben Tönen — die Dur-Tonarten. — Wiederholung der Rhythmik und Melodik aus dem 1sten Jahre des Kursus, und Verbindung derselben mit dynamischen Verhältnissen der Töne. — Daneben Kanons und 2- 3- und 4stimmige Lieder verschiedener Tonarten eingeübt. Herr Mauerhoff.

Sexta.

Ordinarius: Herr Mauerhoff.

1. Latein in 7 St. Davon 1 St. Uebung der Lesefertigkeit. 3 St. Grammatik. Die regelmäßige Formenlehre nach O. Schulz, bis zur 2ten Konjugation incl. Schriftliche Uebungen im Deklin. und Konjugiren. — Die Uebungsbeispiele und die Vokabeln aus den Regeln der Grammatik memorirt. — 3 St. Uebersetzen ꝛc. aus Reuß Elementarübungen 1r Ks. Sentenzen daraus memorirt. Herr Küßner.

2. Deutsch in 7 St. Davon bis z. Jul. 3, später 2 St. regelmäßige Formen-

lehre nach Heinsius; 1 St. Satzbildung nach Krause, auch mit schriftlichen Uebungen, die der Lehrer zu Hause verbesserte; 1 St. Rechtschreibung, theoret. und prakt., auch mit häuslichen Uebungen. Bis zum Febr. Hr. Brunkow, später Hr. Mauerhoff. — Vom Jul. ab wurde 1 der Formenlehre abgenommene Stunde zu Denkübungen nach Krause benutzt. Hr. Lehmann. Endlich 2 St. Lesen und Deklamiren, nach Heinsius Musen 1r Thl. Bis zum Jul. Hr. Küßner, später Hr. Lehmann.

3. Religion in 2 St. Geschichte und Lehren d. h. S. A. T. nach Kohlrausch — Memoriren der Sprüche u. Liederverse. Anfangs Hr. Küßner, zuletzt Hr. Lehmann.

4. Rechnen in 6 St. theils Kopf= theils Tafelrechnen. Von den 4 Grundrechnungsarten in ganzen benannten Zahlen bis zur Multiplikation in Brüchen. Herr Mauerhoff.

5. Naturbeschreibung in 2 St. nach Nikolai. Im Winter das Thier=, im Sommer das Pflanzen= und Mineralreich. Bis z. 12. Febr. Herr Brunkow, später Herr Lehmann.

6. Geographie in 2 St. nach Weiß und Wandkarten. Allg. Geogr. und v. d. besondern der preuß. Staat.. Herr Mauerhoff.

7. Schreiben in 4 St. nach Henning's Vorschr. Bis z. Febr. Herr Mauerhoff, später Herr Brunkow.

8. Zeichnen 2 St. Elementarübungen nach Korff. Herr Mauerhoff.

9. Gesangunterricht. S. bei V.

In Ansehung der Privatlektüre der Primaner, Sekundaner und ältern Tertianer ist es in diesem Schuljahre wie im vorigen (vergl. das Progr. v. 1826 S. 36.) gehalten worden. Auch haben wir dieselbe angenehme Erfahrung gemacht.

II. Verordnungen der Königl. Behörden.

Ueber den Gymnasialunterricht ist uns im Laufe des Schuljahres keine Verordnung zugekommen. Unter dem 16. März d. J. wurde uns indessen ein Auszug aus dem von dem Hohen Königl. Unterrichts=Ministerio vollzogenen Reglement für das mit der Königsberger Universität verbundene litthauische Seminarium mitgetheilt, wodurch allen Theologie Studirenden, die aus preuß. Litthauen gebürtig sind, und das Litthauische als Muttersprache oder durch den Umgang mit dem litth. Volke erlernt haben, zur Pflicht gemacht

wird, an den Uebungen des Seminars Theil zu nehmen. Auch andere Theologie Studirende dürfen unter näher angegebenen Bedingungen derselben beitreten. Die übrigen Bestimmungen gehören nicht hieher, doch sind sie den Schülern der ersten hebräischen Klasse bekannt gemacht worden, und wird diese Bekanntmachung von Zeit zu Zeit erneuert werden.

Das Hohe Königl. Ministerium der geistl. rc. Angelegenheiten, neuerdings, selbst durch provinzialständische Anträge, auf den Unfug, der den bestehenden Verordnungen zuwider, durch das Wegfangen der Singvögel und Ausnehmen der Vogelnester getrieben wird, aufmerksam gemacht, hat verordnet, daß diesem Unfuge auch in den untern Klassen der Gymnasien rc. durch Belehrung und Warnung entgegengewirkt werde. — Außerdem ist uns nur noch eine von dem Königl. Konsistorio und Provinzial-Schul-Kollegio unter dem 29. März d. J. vollzogene Instruktion in 30 §§ für die Direktoren und Rektoren der gelehrten Schulen der Provinz Ostpreußen und Litthauen zugefertigt worden. Es ist, bis auf wenige Veränderungen, dieselbe, welche das Königl. Konsistorium der Provinz Brandenburg unterm 10. Januar 1824 den Direktoren des genannten Bezirks ertheilt, hat. — Empfohlene Lehrbücher und Ausgaben rc.: die Zumptsche Ausgabe des Curtius Rufus, u. „Lehrb. d. allg. Weltgesch. v. Prof. u. O.L. Dr. Ellendt. Königsb., 1827.

B. Chronik des Gymnasiums.

1. Eröffnung des Schuljahres mit dem 16. Oktober 1826, der Schluß mit dem 29sten Oktober d. J.

2. Die Feier des Geburtsfestes Sr. Majestät des Königs eröffnete am 3. August um 9 Uhr Morgens, nach einem 4stimmigen Chorgesange, Hr. O.L. Sperling mit einem Prolog über die Hindernisse, die sich den Herrschern unserer Zeit entgegenstellen, ihren Namen unsterblich zu machen, zeigte dann kürzlich, wie ruhmvoll unser allgemein verehrte König den Kampf mit jenen Hindernissen bestanden, und schloß mit Segenswünschen für das theure Leben des im verflossenen Jahre durch Gottes Gnade uns gleichsam zum zweiten Male geschenkten Landesvaters. Nach einem Zwischengesange schilderten die Primaner: Henke in einer latein. Rede (eigne Arbeit) den Nutzen des Studiums der alten Sprachen; Hecht I. in deutscher Sprache (eigne Arbeit) die Religiosität der Bürger, als Grundlage der Wohlfahrt des Gemeinwesens; die Sekundaner: Keber in einer griechischen Rede (eigene Arbeit) die Freiheitsliebe der Griechen, und Hüb-

2*

ner in deutscher Sprache das friedliche Eiland in sturmbewegtem Meere. Ein skizzirtes Gemälde in allegorischer Deutung (eigene Arbeit). Hierauf folgten Deklamationen von Schülern aus allen übrigen Klassen. Das Ganze beendigte ein 4stimmiger Chorgesang. Nach diesem Schulfeste wohnte das Lehrerkollegium auf dem Hauptmarkte der Stadt der feierlichen Grundsteinlegung zum Fundamente des Standbildes König Friedrich Wilhelms I., des glorreichen Gründers von Gumbinnen und 5 andern litthauischen Städten, und Wiederherstellers unserer durch die Pest von 1709 verödeten Provinz, bei. Das Nähere über diese Feierlichkeit haben die öffentlichen Blätter geliefert.

3. Veränderungen im Lehrerpersonale. Noch war die durch den Tod des Oberlehrers Schopis erledigte Lehrstelle für die Mathematik und Physik nicht besetzt, als die Anstalt einen zweiten ihrer Hauptlehrer, den Oberlehrer der Gesch. und Geogr. Dr. Johann Heinrich Christian Lünemann verlor. In Göttingen geboren, erzogen und auf den dortigen Lehranstalten gebildet, ging er im J. 1809 als Hauslehrer nach Liefland, nahm bald darauf eine Lehrerstelle an der Schule zu Fellin und später an der Kreisschule zu Wolmar an, und wurde 1812, auf Heyne's Empfehlung, als 2ter ordentlicher Lehrer an unsere Anstalt berufen, konnte jedoch, des Krieges wegen, erst im Jul. 1813 hier eintreffen. 1817 rückte er in die erste Unterlehrerstelle ein. Bis 1822 unterrichtete er in den untern und mittlern Klassen (in der Physik auch in Sekunda) in verschiedenen Lehrfächern mit Eifer und gutem Erfolg. Seit Ende 1822 bekleidete er die 3te Oberlehrerstelle, und lehrte hauptsächlich Gesch. und Geogr., Physik und deutschen Stil in den obern Klassen; daneben waren ihm auch einige griech. und latein. Lektionen, besonders in Sekunda, übertragen. Die letzten 2 Jahre hindurch litt er an einem hartnäckigen Augen- und Halsübel, wobei ihm Kräfte und Lebensmuth sichtbar schwanden. Am 20. Jan. d. J. trat ein heftiges Katarrhalfieber hinzu, und am 25. dess. Mts. entriß ihn ein Nervenschlag den Seinen und der Anstalt. Seine Leiche wurde am 1. Febr. von Freunden, Amtsgenossen und den Schülern der 3 obern Klassen zur Gruft geleitet, an welcher, nach einem von Instrumentalmusik begleiteten Trauergesange, Ref. Gefühle aussprach, wie sie die traurigen Erfahrungen der letzten 7 Monate in ihm und seinen Kollegen erregt hatten. Nach einem abermaligen Chorgesange übergab man die irdische Hülle ihrer dumpfen Behausung neben dem Grabe seines ihm kürzlich vorangegangenen Kollegen und Freundes. — Der Verewigte hat in dem „Wörterbuche zu Homers Odyssee, für Anfänger der Homerischen Lektüre," Königsb., bei Unzer 3e Aufl. 1826, und einem ähnlichen zur Ilias. Ebend. 1825. Proben literarischer Thätigkeit hinterlassen.

Zur Ausfüllung der durch diesen Todesfall enstandenen Lücke in den Geschäften wurden die beiden Abtheilungen der Quarta bis auf 4 Stunden wöchentlich, worin sie getrennt blieben, kombinirt, und die Arbeiten anders vertheilt. Wesentliche Hülfe gewährte, außer Herrn Lehmann, der bis zur Besetzung der 3ten Oberlehrerstelle den Unterricht der Sekundaner in der Physik und der Einleit. in die H. S. versah, Hr. Dr. Merleker durch Uebernahme der Geschichte, Geogr. und der meisten philologischen Lektionen in II., wozu er nach seinem Prüfungszeugnisse befugt ist. Auch die übrigen ordentlichen Lehrer, den Ref. mit eingeschlossen, haben die Arbeiten der fehlenden Lehrer, theils bis zum Eintritt des neuen Oberlehrers der Mathematik, theils bis zur Ankunft des dritten Oberlehrers durch überzählige Stunden übertragen.

Der obengedachte Todesfall trug zur schnelleren Besetzung der Oberlehrerstelle für die Math. und Physik bei. Der schon früher für diese Stelle ausgewählte Schulamtskandidat Herr Julius Gustav Albert Sperling aus Ragnit, welcher auf der Universität zu Königsberg, besonders unter Leitung des Herrn Prof. Bessel studirt hat, wurde angewiesen, sich sofort auf seinen Posten zu begeben. Er traf auch schon am 8. Febr. d. J. bei uns ein, wurde am 12. d. M. eingeführt, und trat an demselben Tage sein Amt an.

Zu der dritten Oberlehrerstelle wurde aus mehren Mitbewerbern ein schon erfahrener Lehrer, der Sohn eines gründlich gelehrten, anerkannt eifrigen und geschickten Schulmannes, Herr Dr. Heinrich Otto Hamann aus Königsberg, vom dortigen Stadtgymnasium berufen, an welchem er 1 Jahr als Hülfs- und 7 andere als ordentlicher Lehrer gearbeitet hat. Er hat „Grundzüge der lat. Formenlehre für die unteren Klassen der Gymnasien. Leipzig, bei Leich 1826" herausgegeben. Zwar legte er schon um Ostern d. J. seine bisherige Stelle nieder, machte jedoch zunächst eine Reise nach Sachsen, und traf erst kurz vor dem Anfange der Sommerferien bei uns ein. Am 30. Jun. eingeführt, trat er am 23. Jul. seine Geschäfte an.

Mittels Verfügung vom 17. Jul. d. J. wurde endlich der Anstalt bekannt gemacht, daß der bisherige 2te Oberlehrer, Herr Petrenz, zur ersten Oberlehrerstelle befördert worden sey, jedoch bis zur Entscheidung über den Vorschlag des Ref., die zu dieser Stelle bisher gehörige Dienstwohnung zur Beschaffung eines größern Schulsaales und einiger geräumigeren Lehrzimmer einzuziehen, und dem ersten Oberlehrer eine angemessene baare Entschädigung zu bewilligen, mit Beibehaltung seines bisherigen Einkommens.

Endlich ließ sich Herr Musiklehrer und Organist Hermes bereit finden, den Un-

terricht der obern Singklasse, den er am 1. März 1825 aufgegeben hatte, nach dem Tode des O.L. Lünemann vom 1. Mai d. J. wieder zu übernehmen.

Sachverständige werden in dem vorgekommenen Lehrerwechsel und in dem ungleichzeitigen Eintritte der neu berufenen Lehrer um so mehr zugleich eine Rechtfertigung des Wechsels in Vertheilung der Arbeiten finden, der sich in der obigen Uebersicht der abgehandelten Lehrgegenstände kund gibt, als ihnen aus eigener Erfahrung bekannt ist, wie mannigfaltige andere Rücksichten bei diesem Vertheilungsgeschäfte zu nehmen sind.

C. Statistische Nachrichten.

1. Die Gesammtzahl der Schüler war:

a) zu Ostern 206, wovon 15 in I., 21 in II., 30 in III., 49 in IV., 62 in V., und 29 in VI.; hierunter 43 ganz frei von Entrichtung des Schulgeldes, unter welchen auch 8 Stipendiaten der verehrl. litth. Friedensgesellschaft; 19 andere zahlten $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ bis $\frac{2}{3}$ des Schulgeldes.

b) im Septbr. 218, wovon 15 in I., 18 in II., 30 in III., 47 in IV., 64 in V. und 44 in VI., wovon 45 ganz frei unterrichtet wurden und 19 andere $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ bis $\frac{2}{3}$ des Schulgeldes entrichteten. Abgegangen sind im Ganzen 38, worunter auch die 6 Abiturienten von Michaelis v. J. Von den übrigen sind 21 zu verschiedenen andern Berufsarten, 11 zu andern Lehranstalten abgegangen. Gestorben ist keiner.

Aufgenommen sind im Ganzen 44, die Mehrzahl davon in VI.

Diesmal werden, in Folge der schriftlichen und der am 31. Aug. und 1. Sept. d. J. angestellten mündlichen Prüfung, und zwar alle mit dem Zeugnisse des zweiten Grades, zur Universität entlassen:

1. Karl Jul. Franz Hecht aus Gumbinnen, $20\frac{1}{4}$ J. alt, 8 J. in der Anstalt, von V ab, 2 J. in I.
2. Alex. Heinr. Henke aus Lomza, $20\frac{1}{2}$ J. alt, 9 J. im Gymnasium, von VI ab, davon 2 J. in I., Stipendiat der litth. Friedensgesellschaft.
3. Franz Wilh. Theod. Passauer aus Launinken, 21 J. alt, $5\frac{1}{4}$ J. in der Anstalt, von III ab, davon 2 J. in I.
4. Eduard Dodillet aus Olksnannen bei poln. Neustadt, $19\frac{3}{4}$ J. alt, 9 J. in der Schule, von VI ab, 2 J. in I., Stipendiat der litth. Fried. Ges.
5. Joh. Friedr. Brenke aus Insterburg, $20\frac{3}{4}$ J. alt, $4\frac{1}{2}$ J. in der Anstalt, von III ab, 2 J. in I., gleichfalls Stipendiat ꝛc.
6. Albert Jul. Theod. Conditt aus Pillau, 18 J. alt, 4 J. in der Anstalt, von II. ab, 2 J. in I.
7. Karl Joh. Busching aus Mattischkehmen bei Trakehnen, $21\frac{3}{4}$ J. alt, $8\frac{1}{2}$ J. in der Schule, von VI ab, 2 J. in I., Stipendiat ꝛc.
8. Heinr. Louis Hitzigrath aus Marienpol, $19\frac{3}{4}$ J. alt, $3\frac{1}{4}$ J. in der Schule, von II. ab, 2 J. in I.

Alle beziehen die Universität zu Königsberg, die 5 erstern, um Theologie, die 2 folgenden, um die Rechte zu studiren; der letzte hat sich in Ansehung des Faches noch nicht ganz fest entschlossen.

2. Zur Vermehrung der Bibliothek wurden zu dem etatsmäßigen Fond von 100 Rthlr. jährlich für 1826 noch außerordentlich 69 Rthlr. bewilligt. Von der Summe von 169 Rthlr. sind 119 Rthlr. zum Ankaufe einer Auswahl von Büchern aus dem Nachlasse des O.L. Schopis (für ¾ des Einkaufspreises) verwendet worden. Durch diesen und durch anderweitige Ankäufe, wie auch durch die unten namhaft zu machenden Geschenke, ist unsere Sammlung von 918 Werken in 1791 Bänden*) bis auf 1024 Werke in 1991 Bänden angewachsen. Hiezu sind, in Folge der weisen Anordnung des Programmentausches, gekommen 80 Schulschriften von 1825 und 100 von 1826.

Die vorgedachten Geschenke, welche wir einzig und allein der aufmunternden Huld des Hohen Königl. Ministerii der geistl., Unterr. und Medizinal-Angelegenheiten verdanken, sind folgende:

a) Supplément au Dictionaire chinois-latin du P. Basile de Glémona (imprimé en 1813 par les soins de M. de Guignes), publié d'après l'ordre de S. M. le Roi de Prusse Fr. G. III., par Jules Klaproth. A Paris, de l'imprim. royale 1819. fol.

b) Verzeichniss der Chines. u. Mandschuischen Bücher und Handschriften der Königl. Biblioth. zu Berlin, mit e. Abhandl. über d. Sprache u. Schrift der Uiguren; von Jul. Klaproth. Paris, in der Königl. Druckerei. 1822. fol. (Abgedruckt in 200 Exempl.)

c) Crelle's Journal für die reine und angew. Math. 1r Jahrg. Berlin, 1826 u. 2n Jahrgs. 1s Heft. 1827. 4.

d) P. W. Behrends Neuhaldenslebensche Kreischronik oder Gesch. aller Oerter des landräthl. Kreises Neuhaldensleben im Magdeburg. Neuhaldensl., 1824 u. 1826. 2 Bde.

e) G. S. Hecker (Prorektor des Stargarder Gymnasii) nach seinem Leben und Wirken dargestellt v. Schulrath G. S. Falbe. Stargard, 1825.

Außerdem ist uns 1 Exempl. der von dem Kammerherrn Leop. v. Buch herausgegebenen geognostischen Karte v. Deutschland ꝛc. huldreichst verheißen, und die 1e Lief. davon so eben eingegangen.

3. Die Sammlung von Lesebüchern für die Schüler ist aus dem Versetzungsgelde mit 16 Bänden, und der Vorrath von Schulbüchern für hülfsbedürftige Schüler aus den Aufkünften des v. Meelbeck'schen Legats vermehrt worden.

4. Der physikalische Apparat hat aus dem betreffenden Etatstitel einen Zuwachs von einigen optischen Instrumenten erhalten. Desgleichen ist das Skelett eines Mannes gekauft worden.

Die bisher erschienenen 158 Blätter des lithogr. naturhistor. Atlasses von Goldfuß. Düsseld. b. Arnz et Comp. sind auf Pappe gezogen, und zur bessern Erhaltung lakirt worden. Mit Einschluß des zur Aufbewahrung des Ganzen eingerichteten Schrankes kosten diese 8 ersten Lieferungen, wie sie jetzt sind, der Anstalt 88 Rthlr. 13 Sgr.

*) Im Progr. v. 1826 steht S. 47 irrthümlich in 1864 Bdn.

Uebersicht der Prüfung.

Freitag den 28. September, von 8 Uhr Morgens.

Chorgesang.

I. Sexta.

Biblische Geschichte. Hr. Lehmann.
Deutsche Satzbildung. Hr. Mauerhoff.
Latein. Hr. Küßner.
Geographie. } Hr. Mauerhoff.
Rechnen. }
Die untere Singklasse. Hr. Mauerhoff.

II. Quinta.

Religion. Hr. Lucks
Deutsch. Hr. Brunkow.
Latein. Hr. Küßner.
Geometrie. Hr. Mauerhoff.
Geschichte. Hr. Brunkow.

Hierauf werden einige Schüler aus Sexta und Quinta deklamiren.

Chorgesang.

Freitag, am 28. September, von 2 Uhr Nachmittags.

III. Quarta.

Religion. Hr. Küßner.
Latein. Phaedrus. Hr. Dr. Merleker.
Griechisch. Hr. Lucks.
Arithmetik. Hr. Mauerhoff.
Geographie. Hr. Brunkow.

IV. Tertia.

Religion. Hr. Lehmann.
Xenoph. Hellen. Hr. Dr. Merleker.
Caesar. Hr, Lehmann.
Mathematik. Hr. O.L. Sperling.
Botanik. Hr. Lehmann.
Geschichte. Hr. Dr. Merleker.

Nach dem Abtreten der Klassen werden einige Quartaner und Tertianer deklamiren.

Chorgesang.

Sonnabend, den 29. September, von 8 Uhr Morgens.

Chorgesang.

V. Secunda.

Latein. Virg. Aen. Dir.
Mathematik. Hr. O.L. Sperling.
Geschichte, Hr. O.L. Dr. Hamann.
Griech. Hom. Il. Hr. Dr. Merleker.
Rhetorik. Hr. Küßner.

VI. Prima.

Latein. Cic. de fin. Hr. O.L. Petrenz.
Griechisch. Sophocles. Hr. O.L. Dr. Hamann.
— — Demosth. Hr. O.L. Petrenz.
Mathematik. Hr. O.L. Sperling.

Hierauf die Entlassung der Abiturienten, von welchen Henke im Namen aller Abgehenden von der Anstalt Abschied nimmt. Der Primaner Hecht II. wird den Abgehenden Glück wünschen.

Chorgesang.

Der neue Lehrgang beginnt mit dem 15. Oktober d. J. — Diejenigen resp. Eltern oder Vormünder, die ihre Söhne oder Mündel unserm Unterrichte zu übergeben gesonnen sind, ersuche ich, in so weit ihnen diese Anzeige zu Gesichte kommt, dieselben den 12. und 13. Oktober d. J. von 10 Uhr Vormittags zur Prüfung zu stellen.

Ueber die Conformität der unmöglichen oder imaginären Größen überhaupt und über die Unveränderlichkeit der Form $a + b\sqrt{-1}$ bei jeder Rechnungs-Operation besonders.

Kurze Abhandlung,

zum

Michaels-Programme für das Jahr 1827

verfaßt

vom

Oberlehrer Sperling
am Gymnasio zu Gumbinnen.

Ueber die sogenannten imaginairen, eingebildeten, oder unmöglichen Größen in der Mathematik. *)

§. 1.

Wie häufig jener metaphysische Grundsatz, daß das Unmögliche nicht sein könne, mißverstanden und zu den sonderbarsten Schlüssen Veranlassung wird, hat man nicht selten Gelegenheit unter seinen Schülern zu bemerken. Meinend, daß das Unmögliche, dem man doch Realität ableugnen müsse, eben deswegen nicht erscheinen könne, vergessen sie, daß man mit diesem Worte etwas bezeichnen wolle, von dem einen Begriff zu fassen sich unsere Denkform widersträubt, und lassen sich so zu dem Schlusse verleiten, daß das, was nicht sein könne, nichts sei. Daher auch ihre Verwechselung der unmöglichen Größen mit Null. — Andere, als sie, denen man wohl mehr Philosophie und einen tiefern Blick in das Wesen der Mathematik zutrauen sollte; da sie sich mit ihren Wer-

*) Wenn die Behandlung dieses, obgleich nicht unwichtigen; aber doch in der mathematischen Literatur selten und meistens nur oberflächlich berührten, Themas auf eine Weise ausgeführt ist, die dem Verfasser selbst nicht gnügt und noch viel weniger auf den Beifall tieferer Kenner der Wissenschaft (falls diese Blätter mit ihrer Ansicht beehrt werden sollten) rechnen darf: so sieht sich der Verf. genöthigt zu seiner Entschuldigung zu bemerken, daß verschiedene Gründe und Rücksichten ihn gehindert haben dieser Arbeit die Gründlichkeit und Vollständigkeit zu verschaffen, welche er wünschte.

ken — vornehmlich auch über diesen Gegenstand — an das Licht gewagt, sind zum Theil von dem Irrthume befangen, daß die Rechnung nie auf unmögliche Größen führen könne und daß das Gegentheil nur die Schuld des Rechners sei, der nicht den rechten Sinn der Aufgabe gefaßt; zum Theil aber auch gerade entgegengesetzt auf die absurde Idee gerathen, die unmöglichen Größen auf geometrische Weise als etwas Wirkliches darzustellen.

§. 2.

Wiewohl nun nicht zu läugnen ist, daß gewisse Aufgaben sich auf eine Weise verstehen und behandeln lassen, die zu keinem unmöglichen Resultate führt; während sie in den Händen eines unbedachtsamen und nur mechanischen Rechners sich unmöglich gestalten, so ist damit durchaus nicht dargethan, daß unmögliche Größen überhaupt nicht vorkommen können. Anders und richtig wäre es, wenn jene Männer behaupteten: Das Unmögliche lasse sich bisweilen in der Rechnung vermeiden, nemlich da, wo es nur als eine am Ende verschwindende Mittelgröße eingeführt sei, die dem Rechner den Weg verkürzen oder zwei ganz heterogene Formen in Verbindung bringen solle. Beläge hiezu finden sich in Lagrange's und anderer bedeutenden Mathematiker Schriften bei analytischen Entwikkelungen, die man sonst auch wohl durch Vermittelung der unmöglichen Größen erlangt oder erlangen könnte. — Sich aber auf der andern Seite den reinen Begriff von Größe, wie der Begriff der Zahl ist, durch Bilder zu versinnlichen, die die Unvollkommenheit und Ungeübtheit im abstracten Denken beurkunden (obgleich sie für manche Zwecke nicht zu verwerfen und sogar unentbehrlich sind) darf wohl am allerwenigsten bei den imaginären Größen geduldet werden, und heißt am Ende nichts anders, als das Unmögliche möglich machen. Denn wenn man die unmögliche Zahl in der Reihe der positiven, wie in der Reihe der negativen Zahlen, oder auch in ihrem Verknüpfungspunkte Null vergebens sucht, wie ist dann wohl zu erwarten, daß man sie in den beiden Reihen von Bildern finden werde, welche — aus der physischen oder psychischen Welt entlehnt — die Stelle der möglichen reinen Zahlen vertreten sollen und jenen dem Wesen des Quantums nur angehängten Begriff von Gegensatz im Allgemeinen nur durch

den besondern Gegensatz in der Lage oder in der Bewegung, Wirkung u. dergl. andeuten können?

§. 3.

Ehe ich mich dem eigentlichen Gegenstande dieses Aufsatzes nähere, bedarf es noch der Bemerkung, daß man nicht die unmöglichen Größen nach der Verschiedenheit der Objekte und ihrer Benennungen, worauf Mathematik nur immer angewandt werden mag, in eben so viele verschiedene Arten von unmöglichen Quantitäten zu theilen genöthigt ist; sondern daß man immer nur von dem Unmöglichen in der Mathematik in so fern reden dürfe, als der Begriff davon mit dem von möglichen reinen Zahlen Verwandtschaft hat. Diese Behauptung gründet sich darauf, daß jede Rechnung, gehöre sie in das Gebiet der reinen oder angewandten Mathematik, stets — wenn gleich bisweilen etwas versteckt — in reinen Zahlen geschieht, weil ihr Zweck immer nur seyn kann, die Coefficienten zu den (gesuchten) Benennungen zu liefern. Daher werden wir auch später Alles, was sich von den unmöglichen Größen behaupten läßt, als etwas Allgemeines in der Rücksicht betrachten können, die auf die eben erwähnte unnöthige Unterscheidung des Unmöglichen nach den Benennungen genommen werden dürfte.

§. 4.

Verfolgt man hingegen die Spur der unmöglichen Zahlen bis zu ihrer Quelle, so sieht man leicht, daß sie einen doppelten Ursprung haben und einmal durch Ueberschreitung der eigenthümlichen Form einer Funktion und Einzwängung in eine ihrer Natur durchaus nicht angemessene fremde; das andre Mal durch Ueberschreitung der Grenzen entstehen, zwischen welchen die in einer Funktion vorkommenden Variabeln der Natur dieser Funktion gemäß nothwendig bleiben müssen. Einige Beispiele hierzu mögen diese Worte näher erläutern:

a) In Beziehung auf die Form:

1) $a^2 + b^2$ kann die Form eines Produkts aus zwei binomischen Faktoren, deren Theile Wurzeln von a^2 und b^2 sind, nur unter dem Scheine einer imaginären

Größe annehmen, nemlich $(a + b\sqrt{-1}) \cdot (a - b\sqrt{-1})$.

2) Die Cardanische Formel giebt bekanntlich

$$x = \sqrt[3]{\frac{Q + \sqrt{Q^2 - \frac{4}{27}P^3}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{Q - \sqrt{Q^2 - \frac{4}{27}P^3}}{2}},$$ wo x eine Wurzel der Gleichung $x^3 - Px - Q = 0$ vorstellt und nicht unter der Form von der Summe zweier Cubikwurzeln erscheinen kann, sobald $\frac{4}{27}P^3 > Q^2$ ist.

3) Die Form einer Kreisfunktion läßt sich nur durch Vermittelung einer imaginairen Größe auf die Form der Exponentialgrößen bringen; indem z. B.

$$\sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$ (wo e die Basis der natürlichen Logarithmen bedeutet) und

$$\cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}.$$ Da aber die übrigen, als tng x, Cot x u.s.w. aus Sin x und Cos x so zusammengesetzt sind, daß sich dabei das Unmögliche nicht wegheben kann, so wird dasselbe auch von ihnen gelten.

b) In Beziehung auf die Grenzen:

1) Da die Größe der Fläche eines ebenen Dreiecks von den drei Seiten desselben abhängt, also eine Funktion dieser Seiten ist, was an und für sich klar; aber auch aus der bekannten Formel $F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ sogleich gesehen werden kann, (wo F die Fläche des Dreiecks nach dem Quadrate derjenigen Einheit gemessen, welche den Seiten a, b, c zum Grunde liegt, und s die halbe Summe dieser Seiten bezeichnet); so ist, wenn man folgende Form braucht:

$F = s^2\sqrt{\left(1 - \frac{a}{s}\right)\left(1 - \frac{b}{s}\right)\left(1 - \frac{c}{s}\right)}$, offenbar zu erkennen, daß man die Verhältnißzahlen $\frac{a}{s}$, $\frac{b}{s}$ und $\frac{c}{s}$ nicht über die Grenze 1 hinaus annehmen dürfe. Dieses läuft auf die bekannte geometrische Bedingung hinaus, daß zwei Seiten eines Dreiecks immer größer seyn müssen, als die dritte.

2) Wenn $a^x = y$ gesetzt wird, wo x den Logarithmus der Zahl y für die Basis a bedeutet und demnach x eine, wenn auch unentwikkelte, Funktion von y ist, so

darf y nicht das Gebiet der positiven Zahlen verlassen; denn im entgegengesetzten Falle findet man weder in der Reihe der positiven, noch in der Reihe der negativen Zahlen einen Werth für x, der dem $(-y)$ entspräche, d. h. es würde bei der Annahme von $(-y)$ statt $(+y)$ x unmöglich sein.

3) Setzt man, bei dem Radius 1, $y = \operatorname{Sin} x$, so ist wiederum der Bogen x von y abhängig, d. h. eine Funktion vom Sinus und die Grenzen beider sind durch den Kreis bedingt, so daß y immer nur zwischen $+1$ und -1 liegen kann, während x die Freiheit hat, sich zwischen $+\infty$ und $-\infty$ zu bewegen. Daher zu $y > \mp 1$ kein möglicher Winkel.

Aehnliche Ueberschreitungen wären, den $\operatorname{Cos} x > \mp 1$ oder $\operatorname{Sec} x$ und $\operatorname{Cosec} x < \mp 1$ zu setzen; auch sie würden auf unmögliche Winkel führen.

Eine scheinbare Widerlegung meiner Behauptung, die man in den angeführten Beispielen wohl immer bestätigt sieht, könnte indeß der binomische Satz hergeben, der für den Fall, daß man $(1-x)^{\frac{1}{2n}}$ darnach entwikkelt und $x > 1$ setzt, etwas Mögliches giebt, obgleich er etwas Unmögliches geben sollte. — Man sieht aber aus dem offenbaren Widerspruche, den die Gleichung zwischen dem unmöglichen Ausdrucke $(1-(x>1))^{\frac{1}{2n}}$ und in der möglichen Entwikkelung $1 - \frac{1}{2n}x + \frac{\frac{1}{2n}\left(\frac{1}{2n}-1\right)}{1\,.\,2}x^2 -$ rc. enthält, daß diese Entwikkelung für den angeführten Fall nicht mehr gelten könne und daß die Richtigkeit der binomischen Reihe hier bei $x = 1$ ihre Grenze habe.*)

*) Daß Reihen-Entwikkelungen (die bis ins Unendliche fortgehen) nicht richtig werden, wenn man die nach der Methode der unbestimmten Coefficienten oder nach dem Taylorschen Theorem nöthige Voraussetzung (Funktionalgröße $x = 0$) macht; ungeachtet die Natur der zugehörigen Funktion es nicht erlaubt, ist schon hin und wieder (z. B. in Crelle's Versuch einer allgemeinen Theorie der analytischen Fakultäten), bemerkt; wenn auch nicht allgemein beachtet; daß aber Reihen-Entwikkelungen auf der andern Seite nicht richtig bleiben, wenn man sie für nicht statthafte Werthe der Funktionalgröße gebraucht, hat man, meines Wissens, in den bekanntern und mehr verbreiteten mathematischen Schriften nie bemerkt. Daher verdient wohl ein hierauf Bezug habender, aber wenig verbreiteter

Vergegenwärtigt man sich, was im Anfange des §. 4. gesagt ist, so ergiebt sich daraus:

1) Die Bemerkung, daß man unmögliche Ausdrükke in solche zu unterscheiden hat, deren Werth nur dem Ansehn nach unmöglich ist und in solche, deren Werth wirklich unmöglich ist. — Ob ein Ausdruck von der ersten Art ist, findet man durch eine Umformung desselben, die seinen Werth nicht ändert und möglich wird. Daß er von der zweiten Art ist, lehrt die Nothwendigkeit, außer seiner Form auch seinen Werth zu ändern, um etwas Mögliches zu erhalten.

2) Die Vermuthung, daß es eben so viele wesentlich verschiedene Arten von unmöglichen Größen geben werde, als man sich verschieden geformte Funktionen denken oder zusammensetzen und über ihre Grenzen hinausgehen kann.

Am gewöhnlichsten bringen diejenigen Funktionen unmögliche Größen in die Rechnung, deren schon §. 4. beispielsweise Erwähnung geschah, nemlich die Potenzen, Logarithmen und Kreisfunktionen. Dieses hat seinen Grund natürlich darin, weil sie am häufigsten gebraucht werden. Indeß zeichnet sich von ihnen die Quadratwurzel aus einer negativen Zahl durch ihr öfteres Erscheinen am meisten aus. — Die Potenzen geben bekanntlich in der Form von Wurzelgrößen eine unmögliche Zahl, wenn die unter dem

---

analytischer Satz gekannt und beachtet zu werden; da er sich ziemlich allgemein und bestimmt folgendermaßen hierüber ausspricht: „Wenn eine Funktion von x oder einer ihrer Differentialquotienten für einen Werth $h = x$ unendlich wird, so ist die Reihen-Entwikkelung derselben (nach dem Taylorschen Satze), über diesen Werth h hinaus genommen, ihr nicht mehr entsprechend."

Dieses würde sich auch bei $(1-x)^{\frac{1}{2n}}$ zeigen; sobald man $x = 1$ setzt. — Denn es ist der erste Diffq. $= \frac{1}{2n}(1-x)^{\frac{1}{2n}-1} = -\frac{\frac{1}{2n}}{(1-x)^{1-\frac{1}{2n}}}$ also $= \frac{-\frac{1}{2n}}{0} = -\infty$ für $x = 1$

— Daher die Substitution der obigen Reihe: $1 - \frac{1}{2n}x + \frac{\frac{1}{2n}\left(\frac{1}{2n}-1\right)}{1 \cdot 2}x^2 -$ ꝛc. für $(1-x)^{\frac{1}{2n}}$ nicht erlaubt bei $x > +1$

dem Wurzelzeichen stehende und als Potenz gedachte Zahl negativ und der Wurzelexponent (Wurzelzeiger) gerade ist. Sie sind also darzustellen durch $\sqrt[2n]{-a}$. — Die Logarithmen zu negativen Zahlen bei einer positiven Basis und endlich Winkel, deren Sinus oder Cosinus (für den Radius 1) $> \mp 1$ oder Secanten und Cosecanten $< \mp 1$ können eben so wenig unter den positiven Größen als unter den negativen gedacht werden, noch 0 sein.

Alle diese Quantitäten lassen sich aber auf die Form $a + b\sqrt{-1}$ bringen, wo a und b irgend welche positive oder negative, ganze oder gebrochene, rationale oder irrationale Zahlen bedeuten sollen. Diese Behauptung ließe sich ohne Zweifel auf alle nur denkbare Formen von unmöglichen Größen ausdehnen und beweisen, wenn man nur im Stande wäre, alle Funktionen auf eine gemeinsame Form zu bringen, in der sie nichts von ihrer Eigenthümlichkeit einbüßten. Das eine geschieht nun zwar durch den Taylorschen Satz oder durch seine Erweiterung; allein das andere darf man hierbei und überhaupt nicht erwarten, weil im Allgemeinen wohl immer das Besondere verloren gehen muß. Es wird daher die Annahme, daß $\sqrt{-1}$ die einzige unmögliche Größe sei, nur induktiv gerechtfertigt werden können und jede Funktion, aus der eine unmögliche Quantität entspringen kann, besonders gegeben seyn müssen. Ich werde daher, wegen der, nach meiner Einsicht, im Allgemeinen nicht möglichen Ausführbarkeit der Reduktion jeder Art unmöglicher Größen auf die besondere Form $a + b\sqrt{-1}$, nur die unmöglichen Formen betrachten und reduziren, welche die Wurzelgrößen Logarithmen und Kreisfunktionen erzeugen.

§. 6.

I. Reduktion der Form $\sqrt[2n]{-A}$ auf die Form $a + b\sqrt{-1}$

Da wir hier und auch künftig den bekannten Satz: $(\mathrm{Cos}\,x \mp \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,x)^m = \mathrm{Cos}\,mx \mp \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,mx$ in der größten Allgemeinheit gebrauchen werden, so verweise ich denjenigen, der sich von seiner allgemeinen Richtigkeit noch nicht überzeugt hat, auf Crelle's Versuch einer allgemeinen Theorie der analytischen Fakultäten 3ter Abschn. §. 98., wornach man diesen Satz aber eigentlich schreiben sollte:

$$(\mathrm{Cos}\, x \mp \sqrt{-1}\, \mathrm{Sin}\, x)^m = \mathrm{Cos}\, m\, (2n\pi + x) \mp \sqrt{-1}\, \mathrm{Sin}\, m\, (2n\pi + x)$$

Hier bedeutet n irgend eine positive oder negative ganze Zahl und π die halbe Kreisperipherie oder 180°. Auch bemerke ich noch, daß ich von hier ab, nach der gebräuchlichen Bezeichnung, immer $\sqrt{-1} = i$ setzen und i durchaus in keiner andern Zahlenbedeutung nehmen werde.

Nun kann man aber setzen: $(-A)^{\frac{1}{2m}} = A^{\frac{1}{2m}} (\mp i)^{\frac{1}{m}}$ und die 2 m Werthe, welche dem Ausdrucke $(-A)^{\frac{1}{2m}}$ zukommen, auf $(\mp i)^{\frac{1}{m}}$ übertragen; hingegen unter $A^{\frac{1}{2m}}$ nur die absolute und mögliche Größe dieses Ausdrucks verstehen. — Um die 2m Werthe von $(\mp i)^{\frac{1}{m}}$ zu finden, worauf es jetzt ankommt, und auf die Form $a + bi$ zu bringen, setze man:

$\mp i = \mathrm{Cos}(2n\pi + \frac{\pi}{2}) \mp i\, \mathrm{Sin}(2n\pi + \frac{\pi}{2})$, welches identisch ist, da $\mathrm{Cos}(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = 0$ und $\mathrm{Sin}(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = 1$. Dann ist auch

$$(\mp i)^{\frac{1}{m}} = \left\{ \mathrm{Cos}(2n\pi + \frac{\pi}{2}) \mp i\, \mathrm{Sin}(2n\pi + \frac{\pi}{2}) \right\}^{\frac{1}{m}}$$ oder nach dem oben angeführten Satze:

$$(\mp i)^{\frac{1}{m}} = \mathrm{Cos}\left(\frac{4n+1}{2m}\right)\pi \mp i\, \mathrm{Sin}\left(\frac{4n+1}{2m}\right)\pi$$

Hiermit ist also $(\mp i)^{\frac{1}{m}}$ in jedem Falle (d. h. was n auch bedeuten mag) auf die Form $a + bi$ gebracht und es bleibt nur noch zu zeigen übrig, daß hierin m verschiedene Werthe liegen, deren Anzahl das doppelte Zeichen $\mp$ verdoppelt. Man erhält sie auf folgende Weise: Der Werth von n darf, bei jedem m, gleich einer beliebigen positiven oder negativen ganzen Zahl gesetzt werden; daher gehört

zu $n =$	o	$+1$	$+2$	$+3$	...... $+(m-2)$	$+(m-1)$	$+m$ ..... &
1) .. $\frac{(4n+1)\pi}{2m} =$	$\frac{\pi}{2m}$	$\frac{5\pi}{2m}$	$\frac{9\pi}{2m}$	$\frac{13\pi}{2m}$	...... $\frac{(4m-7)\pi}{2m}$	$\frac{(4m-3)\pi}{2m}$	$\frac{(4m+1)\pi}{2m}$. &
zu $n =$	-1	-2	-2	-4	...... $-(m-1)$	$-m$	$-(m+1)$ .. &
2) .. $\frac{(4n+1)\pi}{2m} =$	$-\frac{3\pi}{2m}$	$-\frac{7\pi}{2m}$	$-\frac{11\pi}{2m}$	$-\frac{15\pi}{2m}$	... $\frac{(-4m+5)\pi}{2m}$	$\frac{(-4m+1)\pi}{2m}$	$\frac{(-4m-3)\pi}{2m}$ &

Die nach dem Winkel $\frac{(4m-3)\pi}{2m}$ bis ins Unendliche fortzusetzende Reihe 1) kann in lauter Perioden getheilt werden, deren jede eben so viele Glieder hat, als die erste von $\frac{\pi}{2m}$ bis $\frac{(4m-3)\pi}{2m}$ gerechnete, d. i. m Glieder; und alle diese Perioden sind insofern, als man von jedem Gliede Cosinus und Sinus zu nehmen hat, genau der ersten Periode gleich zu achten, da ihre Glieder sich nur immer um ganze Peripherien von den Gliedern der ersten Periode unterscheiden. Dasselbe gilt auch von der Reihe 2), wenn man über das Glied $\frac{(-4m+1)\pi}{2m}$ bis ins Unendliche hinausgeht.

Daher scheinen die beiden ersten Perioden der Reihe 1) und 2), also

$$\frac{\pi}{2m},\ \frac{5\pi}{2m},\ \ldots\ldots\ \frac{(4m-7)\pi}{2m},\ \frac{(4m-3)\pi}{2m} \text{ und;}$$

$$-\frac{3\pi}{2m},\ -\frac{7\pi}{2m},\ \ldots\ \frac{(-4m+5)\pi}{2m},\ \frac{(-4m+1)\pi}{2m}$$

durchgängig verschiedene Werthe für die Sinus und Cosinus ihrer Glieder zu geben; allein bei genauerer Betrachtung findet man, daß auch hier die 2te Reihe eine bloße Wiederholung der Resultate der ersten Reihe, in umgekehrter Ordnung, liefert, indem

$$\begin{matrix}\text{Sin}\\ \text{Cos}\end{matrix}\left\{-\frac{3\pi}{2m}\right\} = \begin{matrix}\text{Sin}\\ \text{Cos}\end{matrix}\left\{\frac{(4m-3)\pi}{2m}\right\},\ \begin{matrix}\text{Sin}\\ \text{Cos}\end{matrix}\left\{-\frac{7\pi}{2m}\right\} = \begin{matrix}\text{Sin}\\ \text{Cos}\end{matrix}\left\{\frac{(4m-7)\pi}{2m}\right\} \text{ u. s. w.}$$

bis $\begin{matrix}\text{Sin}\\ \text{Cos}\end{matrix}\left\{\frac{(-4m+1)\pi}{2m}\right\} = \begin{matrix}\text{Sin}\\ \text{Cos}\end{matrix}\left\{\frac{\pi}{2m}\right\}$ ist. Folglich erhält man für $(-A)^{\frac{1}{2m}}$, wenn man der Einfachheit wegen $A^{\frac{1}{2m}} = R$ setzt, nachstehende 2m verschiedene Werthe:

$$1)\ R.\left\{\mathrm{Cos}\frac{\pi}{2m} \mp i\,\mathrm{Sin}\frac{\pi}{2m}\right\}$$

$$2)\ R.\left\{\mathrm{Cos}\frac{5\pi}{2m} \mp i\,\mathrm{Sin}\frac{5\pi}{2m}\right\}$$

$$3)\ R\left\{\mathrm{Cos}\frac{9\pi}{2m} \mp i\,\mathrm{Sin}\frac{9\pi}{2m}\right\}$$

$$4)\ R\left\{\mathrm{Cos}\frac{13\pi}{2m} \mp i\,\mathrm{Sin}\frac{13\pi}{2m}\right\}$$

$$\vdots$$

$$m)\ R\left\{\mathrm{Cos}\frac{(4m-3)}{2m}\pi \mp i\,\mathrm{Sin}\frac{(4m-3)}{2m}\pi\right\}$$

Beispiel 1. $\sqrt[4]{-9}$ oder $(-9)^{\frac{1}{4}}$. Hier ist $A=9$ und $m=2$ folglich $R=A^{\frac{1}{2m}}=\sqrt{3}$. Daher

$$1)\ \sqrt[4]{-9}=\sqrt{3}\left\{\mathrm{Cos}\frac{\pi}{4} \mp i\,\mathrm{Sin}\frac{\pi}{4}\right\}=\sqrt{3}\left\{\mathrm{Cos}\ 45^\circ \mp i\,\mathrm{Sin}\ 45^\circ\right\}=\sqrt{3}\left\{\sqrt{\tfrac{1}{2}} \mp i\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right\}$$

$$2)\ \sqrt[4]{-9}=\sqrt{3}\left\{\mathrm{Cos}\frac{5\pi}{4} \mp i\,\mathrm{Sin}\frac{5\pi}{4}\right\}=\sqrt{3}\left\{\mathrm{Cos}\,225^\circ \mp i\,\mathrm{Sin}\,225^\circ\right\}=\sqrt{3}\left\{-\sqrt{\tfrac{1}{2}} \mp i\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right\}$$

Beispiel 2. $\sqrt[6]{-8}$ oder $(-8)^{\frac{1}{6}}$. Hier ist $A=8$ $m=3$ folglich $R=A^{\frac{1}{2m}}=\sqrt{2}$. Daher

$$2)\ \sqrt[6]{-8}=\sqrt{2}\left\{\mathrm{Cos}\frac{\pi}{6} \mp i\,\mathrm{Sin}\frac{\pi}{6}\right\}=\sqrt{2}\left\{\mathrm{Cos}\ 30^\circ \mp i\,\mathrm{Sin}\ 30^\circ\right\}=\sqrt{2}\left\{\tfrac{1}{2}\sqrt{3} \mp \tfrac{1}{2}i\right\}$$

$$1)\ \sqrt[6]{-8}=\sqrt{2}\left\{\mathrm{Cos}\frac{5\pi}{6} \mp i\,\mathrm{Sin}\frac{5\pi}{6}\right\}=\sqrt{2}\left\{\mathrm{Cos}\,150^\circ \mp i\,\mathrm{Sin}\,150^\circ\right\}=\sqrt{2}\left\{-\tfrac{1}{2}\sqrt{3} \mp \tfrac{1}{2}i\right\}$$

3) $\sqrt[6]{-8} = \sqrt{2}\left\{\text{Cos}\frac{9\pi}{6} \mp i\,\text{Sin}\frac{9\pi}{6}\right\} = \sqrt{2}\left\{\text{Cos}\,270^\circ \mp i\,\text{Sin}\,270^\circ\right\} = \sqrt{2}\left\{\qquad \mp \tfrac{1}{2} i\right\}.$

Durch eine Probe kann man sich leicht von der Richtigkeit überzeugen.

§. 7.

Anmerk. Umgekehrt könnte man nun auch eine Zahl von der Form $a + bi$ als ein gewisses Vielfaches von einer gewissen Potenz des i betrachten und diesen Faktor und Exponenten auf folgende Weise finden:

Sey $a + bi = Ri^{\frac{1}{m}}$ oder $\frac{a}{R} + \frac{b}{R} i = i^{\frac{1}{m}}$ folglich (nach §. 6)

$\frac{a}{R} + \frac{b}{R} i = \text{Cos}\frac{(4n+1)}{2m}\pi + i\,\text{Sin}\frac{(4n+1)}{2m}\pi$. Da nun Mögliches nur Möglichem und Unmögliches Unmöglichem gleich seyn kann, so ist

1) $\frac{a}{R} = \text{Cos}\frac{(4n+1)}{2m}\pi$ und $\frac{b}{R} i = i\,\text{Sin}\frac{(4n+1)}{2m}\pi$ oder

2) $\frac{b}{R} = \text{Sin}\frac{(4n+1)}{2m}\pi$ Daraus folgt, weil $\text{Cos}^2 + \text{Sin}^2 = 1$,

$\frac{a^2}{R^2} + \frac{b^2}{R^2} = 1$ oder $R = \sqrt{a^2 + b^2}$. Ferner, da $\frac{\text{Sin}}{\text{Cos}} = \text{tng}$, $\frac{b}{a} = \text{tng}\frac{(4n+1)}{2m}\pi$;

mithin $m = \frac{(4n+1)\pi}{2\,\text{Arc}\left(\text{tng} = \frac{b}{a}\right)}$. Nun darf aber der kleinste Bogen, welcher zur $\text{tng} = \frac{b}{a}$ gehört um beliebig viele halbe Peripherien vermehrt oder vermindert werden, ohne daß sich dabei die Tangente ändert; also könnte man statt $\text{Arc}\left(\text{tng} = \frac{b}{a}\right)$, wenn man den kleinsten Bogen $= \frac{p}{q}\pi$ gefunden hat, $\frac{p}{q}\pi \mp r\pi$ setzen, wo r jede ganze Zahl bedeutet. Dann wäre $m = \frac{(4n+1)\pi}{2\left(\frac{p}{q} \mp r\right)\pi} = \frac{4n+1}{2\left(\frac{p}{q} \mp r\right)}$. Daß für n ebenfalls nur ganze Zahlen gesetzt werden dürfen, wird aus dem vorigen §. noch erinnerlich seyn.

Beispiel: $\sqrt{2}+i\sqrt{2}$. Hier ist $a=\sqrt{2}$ $b=\sqrt{2}$ folglich $R=2$ und $m=\frac{(4n+1)\pi}{2\,\mathrm{Arc}(\mathrm{tng}=1)}$ Nun ist $\mathrm{Arc}(\mathrm{tng}=1)=45^\circ$ oder $\frac{1}{4}\pi$ also $\frac{p}{q}=\frac{1}{4}$ und daher $m=\frac{4n+1}{2(\frac{1}{4}\mp r)}$ für $n=0$ und $r=0$ kommt heraus $m=2$ d. h. $\sqrt{2}+i\sqrt{2}=2.\,i^{\frac{1}{2}}$. Man sieht aus diesem Beispiel, wie aus der allgemeinen Auflösung, daß sehr verschiedene und unendlich viele Potenzen von i gefunden werden können, von denen eine Wurzel die gegebene Zahl von der Form $a+bi$ ist. So wäre, wenn allein $r=0$ gesetzt würde, in diesem Beispiel $m=2(4n+1)$ und

$\sqrt{2}+i\sqrt{2}=2.\,i^{\frac{1}{2(4n+1)}}$, wo man für n nach der Reihe 1, 2, 3, 4 u. s. w. setzen kann. Folglich $\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ auch gleich $2.\,i^{\frac{1}{10}}$ oder $2.\,i^{\frac{1}{18}}$ oder $2.\,i^{\frac{1}{26}}$ etc.

§. 8.

II. Reduktion der Logarithmen negativer Zahlen auf die Form $a+bi$.

Ich bemerke hier vorläufig, daß ich die natürlichen Logarithmen, deren Basis, nach der gebräuchlichen Bezeichnung, e sei, allein durch ein der Zahl vorgesetztes l; die künstlichen hingegen durch das Zeichen log andeuten werde. Auch wird man sich im Verfolg daran erinnern müssen, daß jede ganze Potenz von i auf 1 oder i zurück kommt. Denn $i^1=i$; $i^2=([-1]^{\frac{1}{2}})^2=-1$; $i^3=i.i^2=-i$; $i^4=(i^2)^2=+1$ und allgemein $i^{4k}=(i^4)^k=1$; $i^{4k+1}=i^{4k}\,i^1=i$; $i^{4k+2}=i^{4k}\,i^2=-1$; $i^{4k+3}=i^{4k}\,i^3=-i$. Eine von den 4 Formen: $4k$, $4k+1$, $4k+2$, $4k+3$ muß aber ein ganzer Exponent immer haben, da man für k, 0, 1, 2, 3 u. s. w. setzen darf; also giebt jede ganze Potenz von i, wie eben bemerkt wurde, immer 1 oder i.

Setzt man nun $a^x=y$, wo a irgend eine künstliche Basis, y die Zahl und x den zugehörigen Logarithmus vorstellt, so hat man bekanntlich:
$y=a^x=1+\frac{(la)}{1}x+\frac{(la)^2}{1.2}x^2+\frac{(la)^3}{1.2.3}x^3+\frac{(la)^4}{1.2.3.4}x^4+$ etc. etc., eine Entwickelung, die für jeden möglichen und unmöglichen Werth von x richtig bleibt.

Nehmen wir jetzt an, daß für $-y$ x die Form $\alpha+\beta i$ habe, so wird diese Annahme gerechtfertigt und die versprochene Reduktion gemacht seyn, wenn sich für α und β wirklich mögliche Werthe finden lassen. Wir setzen daher

$$-y = a^{\alpha+\beta i} = a^{\alpha}.\,a^{\beta i} = a^{\alpha}.\left\{1+\frac{(la)}{1}\beta i+\frac{(la)^2}{1.2}.\beta^2 i^2+\frac{(la)^3}{1,2,3}.\beta^3 i^3+\text{etc. etc.}\right\}$$

also auch

$$-y = a^{\alpha}\left\{1+\frac{(la)}{1}.\beta i-\frac{(la)^2}{1.2}.\beta^2-\frac{(la)^3}{1.2.3}\beta^3 i++--\text{etc.}\right\}$$

Trennt man hier die möglichen Glieder von den unmöglichen, und zieht aus letztern den gemeinschaftlichen Faktor i heraus, so erhält man:

$$-y = a^{\alpha}.\left\{1-\frac{(la)^2}{1.2}\beta^2+\frac{(la)^4}{1.2.3.4}.\beta^4-\text{etc.}\right\}+a^{\alpha}\left\{\frac{(la)}{1}\beta-\frac{(la)^3}{1.2.3}.\beta^3+\text{etc.}\right\}i$$

Der augenscheinliche Widerspruch, welchen diese Gleichung für ein beliebiges α und β in sich schließt, kann nur dadurch vermieden werden, daß man dem bis jetzt noch unbestimmten α und β solche Werthe beilegt, für welche der unmögliche Theil ganz wegfällt und der mögliche negativ und zwar $= -y$ wird. Glücklicherweise hilft uns hier die Bemerkung aus einer großen Verlegenheit, daß die erste eingeklammerte Reihe die Form einer Cosinus-Reihe, die zweite in i multiplizirte aber die Form einer Sinus-Reihe hat. Denn bekanntlich ist:

$$\text{Cos}\,z = 1-\frac{z^2}{1.2}+\frac{z^4}{1.2.3.4}-\frac{z^6}{1.2.3.4.5.6}+\text{etc}$$

$$\text{Sin}\,z = z-\frac{z^3}{1.2.3}+\frac{z^5}{1.2.3.4.5.6}-\text{etc.}$$

Hiernach könnte man z mit $(la)\beta$ vergleichen und demnach $-y = a^{\alpha}\,\text{Cos}\,(la)\beta + i a^{\alpha}\,\text{Sin}\,(la)\beta$ setzen und es müßte für $(la)\beta$ ein solcher Werth angenommen werden, der gleichzeitig $\text{Cos}\,(la)\beta = -1$ und $\text{Sin}\,(la)\beta = 0$ macht. Ein solcher Werth wäre aber $\mp(2n+1)\pi$, wenn n irgend eine ganze positive Zahl und π die halbe Kreisperipherie (für den Radius 1) bedeutet; daher $(la)\beta = \mp(2n+1)\pi$ und $\beta =$

$\mp \frac{(2n+1)}{la}\pi$. Unter dieser Bedingung bliebe also $-y = -a^{\alpha}$, woraus $\alpha = \log y$ folgt, so daß demnach $\log(-y) = \log y \mp i\,\frac{(2n+1)}{la}\pi$ gefunden wäre.

Man könnte auch $\log(-y) = \log y \mp M(2n+1)\pi i$ schreiben und unter M den Modul für das System verstehen, dessen Basis a ist.

Beispiel: In dem Briggischen System, wofür $M = 0,4342944...$, wäre, wenn man noch für π seinen bekannten Werth $4,1415926...$ setzt, $\log(-2) = \log 2 \mp 0,4342944... \times 3,1415826...\ (2n+1)i$; oder, $n = 0$ gesetzt, $\log(-2) = \log 2 \mp 1,3644760..... \times i$.

Anmerk. 1. Läßt man die künstliche Basis in die natürliche übergehen, für welchen Fall $a = e$ und $M = 1$, so verwandelt sich die gefundene Formel in $l(-y) = ly \mp (2n+1)\pi i$.

Anmerk. 2. Jede negative Zahl hat, wie die Formel zeigt, unendlich viele Logarithmen von der Form $a + bi$; indeß findet man dasselbe auch bei den positiven Zahlen, welche, außer den unendlich vielen unmöglichen, auch einen möglichen Logarithmus haben. Es ist nemlich, wenn man diesen einen möglichen Logarithmus durch $l'og\,y$ bezeichnet, $l'og\,y = l'og\,y \mp \frac{2n\pi i}{la} = l'og\,y \mp 2nM\pi i$.

Anmerk. 3. Der baldige Gebrauch möge es entschuldigen, daß ich hier an einer nicht ganz dazu passenden Stelle auch den Logarithmus von einer unmöglichen Zahl angebe; er ist folgender: $\log(u+vi) = l'og(u^2+v^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{i\,\mathrm{Arc}}{la}\left(\mathrm{tng} = \frac{u}{v}\right)$

§. 9.

III. Reduktion der Bogen (Winkel) auf die Form $a + bi$, wenn ihr Sinus oder Cosinus > 1; oder Sekante oder Cosekante < 1.

Die hier anzustellende Rechnung darf sich nur auf den Sinus und die Sekante erstrecken; indem hieraus die Resultate für Cosinus und Cosekante als das Ergebniß ei-

ner

ner ganz einfachen Substitution zu betrachten sind, in sofern $\mathrm{Cos}\,x = \mathrm{Sin}\,(\frac{1}{2}\pi - x)$ und $\mathrm{Cosc}\,x = \mathrm{Sec}\,(\frac{1}{2}\pi - x)$ ist. Setzt man nun $y = \mathrm{Sin}\,x$ (für den Radius 1) und braucht für $\mathrm{Sin}\,x$ die schon in §. 4. angegebene bekannte Umformung $\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$, so ist $y = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$. Hieraus findet sich durch Auflösung der daraus entstehenden quadratischen Gleichung $e^{ix} = iy \mp \sqrt{1 - y^2}$, welches für unsere Annahme, wonach $y > 1$, besser so geschrieben wird: $e^{ix} = iy \mp i\sqrt{y^2 - 1}$. Auch darf nur von den beiden Zeichen das positive genommen werden, weil sonst für $x = 0$ und (folglich) $y = 0$ nicht, wie nöthig $1 = 1$ herauskommt. Nimmt man ferner von beiden Theilen der Gleichung den natürlichen Logarithmus, so erhält man:

$$ix = li + l\left\{y + \sqrt{y^2 - 1}\right\};\ \text{also}\ x = -\,ili - il\left\{y + \sqrt{y^2 - 1}\right\}$$

Nach §. 8. Anmerk. 3. wird, indem man $a = e$, $n = 0$, $v = 1$, also $\mathrm{Arc}\,(\mathrm{tng} = \frac{v}{u}) = \mathrm{Arc}\,(\mathrm{tng} = \infty) = (\mp n + \frac{1}{2})\pi$ setzt, $li = l1 + (\mp n + \frac{1}{2})\pi i$ und demnach $-\,ili = (\mp n + \frac{1}{2})\pi$ gefunden. Zugleich ist nach §. 8. Anmerk. 2., wenn man die gehörigen Substitutionen macht,

$$l(y + (\sqrt{y^2 - 1}) = l'(y + \sqrt{y^2 - 1}) \mp 2n\pi i;\ \text{also}$$

$$-\,il\left\{y^2 + \sqrt{y^2 - 1}\right\} = \mp\, 2n\pi - il'(y + \sqrt{y^2 - 1}).$$

Die Zusammenstellung dieser beiden Resultate giebt $x = (\mp m + \frac{1}{2})\pi - il'(\sqrt{y^2 - 1})$, wo m jede beliebige ganze Anzahl bedeutet. Dieser Ausdruck für x hat die gesuchte Form $a + bi$, weil a und b auch negative Werthe haben dürfen. — Beispiel: der Bogen dessen Sinus gleich 2 (oder der Durchmesser) seyn soll, müßte $x = \frac{1}{2}\pi - il'(2 + \sqrt{3})$ seyn, wenn man m o setzte.

§. 10.

Wenn $y = \operatorname{Cos} x$ und $y > 1$, so ist hier $x = \mp m\pi + il'\left(y + \sqrt{y^2-1}\right)$ denn $y = \operatorname{Cos} x = \operatorname{Sin}\left(\tfrac{1}{2}\pi - x\right)$ giebt nach dem vorigen §.
$\tfrac{1}{2}\pi - x = \left(\mp m + \tfrac{1}{2}\right)\pi - il'\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right)$ daher
$x = \mp m\pi + il'\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right)$. Beispiel: der Bogen, dessen Cosinus $= 2$ herauskommen soll, müßte, wenn man m wieder $= 0$ setzt, $x = il'(2 + \sqrt{3})$ seyn.

§. 11.

Da die Sekante der reciproke Werth des Cosinus, also $y = \frac{1}{\operatorname{Cos} x} = \frac{2}{e^{ix} + e^{-ix}}$ (man sehe §. 4.) ist, so hat man hiernach
$e^{ix} = \frac{1 \mp \sqrt{1 - y^2}}{y}$; also $ix = l\left(\frac{1 \mp \sqrt{1 - y^2}}{y}\right)$ Indeß darf man wieder nur das Zeichen + nehmen, damit die Gleichung mit der bekannten Formel
$e^{ix} = \operatorname{Cos} x + i \operatorname{Sin} x$, auf welche sie leicht zurückgeführt werden kann, übereinstimme.

Nach unserer Annahme ist nun $y < 1$ und nach §. 8. Anmerk. 2
$l\left(\frac{1 + \sqrt{1 - y^2}}{y}\right) = l'\left(\frac{1 + \sqrt{1 - y^2}}{y}\right) \mp 2n\pi i$; daher
$x = \mp 2n\pi - il'\left(\frac{1 + \sqrt{1 - y^2}}{y}\right)$. Man sieht also auch hierin die Form $a + bi$. — Beispiel: Sollte die Sekante $y = \tfrac{3}{5}$ seyn, so hätte man den zugehörigen Bogen $x = \mp 2n\pi - il'3$, oder wenn $n = 0$ genommen wird, $x = -il'3$.

§. 12.

Um auf das Resultatat für den der Cosekante $y < 1$ zugehörigen Bogen zu kommen, braucht man nur gerade auf dieselbe Weise, wie in §. 10, zu verfahren; d. h.

man setze $y = \mathrm{Sec}\,(\frac{1}{2}\pi - x)$, woraus nach §. 11. $\frac{1}{2}\pi - x = \mp 2n\pi - il'\left(\frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y}\right)$ also $x = (\mp 2n + \frac{1}{2})\pi + il'\left(\frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y}\right)$ folgt. Beispiel: Zu $y = \frac{4}{5}$ gehört der Bogen $x = (\mp 2n + \frac{1}{2})\pi + il'2$ oder für $n = o$ $x = \frac{1}{2}\pi + il'2$.

§. 13.

Aus den bis jetzt gemachten Reduktionen, die sämmtlich auf die Form $a + b\sqrt{-1}$ zurück kamen, geht deutlich hervor, daß zwischen allen diesen Funktionen ein inniger Zusammenhang stattfinden müsse, der bei den Wurzeln und Logarithmen auch anschaulich in der Gleichung $a^x = y$ vor Augen liegt und bei den Kreisfunktionen in der Möglichkeit, sie auf Potenzialformen zu bringen, seinen Grund hat. Eben dieser Zusammenhang, auch wenn er sich nur in der gemeinsamen Form $a + bi$ zeigen sollte, führt daher die Ueberzeugung herbei, daß man auf gleiche Weise, bei den behandelten Funktionen wenigstens, auch die Form $a + b\lambda$ oder $a + b\,\varphi$ (wo λ den Logarithmus einer bestimmten negativen Zahl, etwa -1, und φ den zu einem bestimmten über $+1$ oder -1 hinausliegenden Sinus oder Cosinus gehörigen Winkel bedeuten soll) als eine allen gemeinschaftliche Form annehmen dürfte. Denn setzt man $l(-k) = \lambda$ und nimmt an $l(-k)$ sey schon, nach §. 8. Anmerk. 1., auf die Form $a + bi$ gebracht, so daß $l(-k) = \alpha + \beta i$; also auch $\lambda = \alpha + \beta i$; so ergiebt sich hieraus $i = -\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\lambda}{\beta}$ und $(-A)^{\frac{1}{2n}}$, welches (nach §. 6.) $= p + qi$ gefunden seyn möge, geht durch Substition des Werthes von i in $p + q\left(-\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\lambda}{\beta}\right)$ oder in $\left(p - q\,\frac{\alpha}{\beta}\right) + \frac{q}{\beta}\,\lambda$ über, was der Form nach $= a + b\lambda$ ist, wie behauptet wurde. Dieses Beispiel möchte eine hinreichende Anleitung enthalten, für die übrigbleibenden Fälle, wo der Gang der Umformung im Wesentlichen derselbe ist, die aufge-

stellten Formen $a + b\lambda$ und $a + b\varphi$ zu finden, und es dürfte demgemäß meine Behauptung für vollständig begründet gelten.

§. 14.

Werfen wir nun einen Blick auf das Verfahren, wonach gefunden wurde, daß $(-A)^{\frac{1}{2n}} = a + bi$; $\log(-y) = a + bi$ und Arc (Sin oder Cos $> \mp 1$) $= a + bi$; so sehen wir diese Formen entweder durch unmittelbare Entwickelung sich ergeben, oder als eine Voraussetzung sich rechtfertigen lassen. — Jede dieser Reduktionsarten scheint auch bei einer allgemeinen Untersuchung anwendbar zu seyn, je nachdem die Umstände es erlauben.

Die unmittelbare Entwickelung nach dem für höchst allgemein gehaltenen Taylorschen Theorem, oder seiner Erweiterung auf Funktionen von mehreren Veränderlichen, hört, wie ich schon oben §. 4. *) erwähnte, indeß gerade da auf richtig zu seyn, wo wir ihrer bedürften, um die Form $a + bi$ nachzuweisen; und man müßte also für die Fälle, wo der Werth der Funktionalgröße die ihm durch die Form der Funktion und die Art der Verknüpfung der einzelnen Glieder vorgeschriebenen Grenzen überschreitet, eine besondere, der Taylorschen vielleicht ähnliche, Entwickelung haben. Solche allgemeine und vollständige Entwickelung einer Funktion müßte daher immer von der Form $R + R'i$ und zwar so seyn, daß, bei Annahme der Veränderlichen zwischen den gehörigen Grenzen, R möglich und $R' = 0$ oder von der Form $R''i$ (wo R'' möglich); im entgegengesetzten Falle aber R und R' möglich wäre. Da wir nun ein analytisches Theorem von der Art nicht besitzen; so bleibt in dem Falle, daß die Funktion fx für ein über seine Grenzen tretendes x genommen werden soll, nur folgendes die im Anfange dieses §s. zuletzt genannte Reduktionsart in sich schließende Mittel übrig: Man setze $fx = y$ und bezeichne das an sich zwar mögliche, aber über die gehörige Grenze genommene x durch x'; das correspondirende y durch $a + bi$; alsdann wende man eine solche Operation an, welche mit der Änderung der Form von fx zugleich die Grenzen dieser

Funktion erweitert und den Werth x′ zuläßt. Eben diese Operation muß aber auch eine Funktion von a + b i geben, welche nach dem Taylorschen Satze richtig entwickelt werden kann. Der Zweck hiervon ist, zwei Gleichungen für a und b zu erhalten, um diese daraus zu bestimmen.

Bezeichnet man nemlich die erwähnte Operation durch φ, so daß $\varphi\,(fx) = \varphi\,y$ also

$$\varphi\,(fx') = \varphi\,(a + bi) = \varphi\,a + \frac{d\,\varphi\,a}{da}\cdot\frac{bi}{1} + \frac{d^2\,\varphi\,a}{da^2}\cdot\frac{b^2\,i^2}{1.2} + \frac{d^3\,\varphi\,a}{da^3}\cdot\frac{b^3\,i^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

so hat man:

$$1)\quad \varphi\,(fx') = \varphi\,a - \frac{d^2\,\varphi\,a}{da^2}\cdot\frac{b^2}{1.2} + \frac{d^4\,\varphi\,a}{da^4}\cdot\frac{b^4}{1.2.3.4} - \text{etc.}$$

$$2)\quad o = \frac{d\,\varphi\,a\,.\,b}{da} - \frac{d^3\,\varphi\,a}{da^3}\cdot\frac{b^3}{1.2.3} + \frac{d^5\,\varphi\,a}{da^5}\cdot\frac{b^5}{1.2.3.4.5} - \text{etc.}$$

Anmerk. 1. Ein besonderer Fall von diesem Verfahren ist die sogenannte Umkehrung einer Reihe $y = A + Bx + Cx^2 + \text{etc.}$ in $x = \alpha + \beta y + \gamma y^2 + \text{etc.}$; denn das in y enthaltene x ist nach der Umkehrung der Reihe nun an und für sich keiner Grenze mehr unterworfen und kann also auch $= x'$ werden, in welchem Falle $y = a + b\,i$ zu setzen ist. Die hieraus folgenden beiden Gleichungen geben das gesuchte a und b.

Anmerk. 2. Die in §. 6. angewandte Behandlung der Entwickelung des $(-A)^{\frac{1}{2n}}$ liefert zu der hier ausgesprochenen Regel ein besonderes Beispiel.

§. 15.

Dem aufmerksamen Leser wird es nicht entgangen seyn, daß ich von den beiden Fällen, die bei dem Ueberschreiten der Grenzen einer Funktionalgröße denkbar sind, bis jetzt immer nur den betrachtet habe, welcher noch in das Gebiet der möglichen Zahlen fällt. Daß nun aber auch der Werth der Funktionalgröße nach der Ueberschreitung an und für sich schon ein unmöglicher seyn kann, leidet keinen Zweifel. Es möge daher

das Nöthige hierüber noch nachfolgen, um zu zeigen, daß auch die hieraus entspringende Größe von der Form a + bi sey.

Ist f (x + h) irgend eine Funktion von (x + h), die wirklich

$fx + \frac{d\ fx}{dx} \cdot \frac{h}{1} + \frac{d^2\ fx}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3\ fx}{dx^3} \cdot \frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.}$ als identische Entwickelung giebt, so würde, wenn man statt x a, statt h bi setzte, unter der Voraussetzung, daß a nicht ein Werth sey, der die Entwickelung für fx nach dem Taylorschen Satze ungereimt macht,

$$f(a + bi) = fa + \frac{d\ fa}{da} \cdot bi + \frac{d^2\ fa}{da^2} \cdot \frac{b^2 i^2}{1.2} + \frac{d^3\ fa}{da^3} \cdot \frac{b^3 i^3}{1.2.3} + \text{etc. oder}$$

$$f(a+bi) = \left\{ fa - \frac{d^2\ fa}{da^2} \cdot \frac{b^2}{1.2.} + \frac{d^4\ fa}{da^4} \frac{b^4}{1.2.3.4} - \text{etc.} \right\} + \left\{ \frac{d\ fa}{da} \cdot \frac{b}{1} - \frac{d^3\ fa}{da^3} \cdot \frac{b^3}{1.2.3} + \text{etc.} \right\} i$$

folglich f (a + bi) von der Form A + Bi seyn.

Sollte aber diese Voraussetzung nicht gültig also a so beschaffen seyn, daß fa, oder $\frac{d\ .\ fa}{da}$, oder $\frac{d^2\ .\ fa.}{da^2}$ u. s. w. ∞ wäre (siehe §. 4. *), so würde man nicht mehr f (a + bi) geradezu nach dem Taylorschen Satze richtig analysiren und auf die Form A + Bi bringen, aber doch wenigstens nachweisen können, daß diese Form statthaft sey. Denn darf auch x den Werth a + bi in der Entwickelung von fx nicht annehmen, so läßt sich jedenfalls denken, daß fx = y umgekehrt und $x = A + By + Cy^2 + Dy^3 + \text{etc.}$ (wie im §. 14.) gesetzt werden könnte. Dann aber folgt, indem man vorläufig $y = \alpha + \beta i$ und x, wie verlangt, = a + bi annimmt, daß
$a + bi = A + B(\alpha + \beta i) + C(\alpha + \beta i)^2 + D(\alpha + \beta i)^3 + \text{etc.}$
also:

1) $a = A + B\alpha + C(\alpha^2 - \beta^2) + D(\alpha^3 - 3\alpha\beta^2) + \text{etc.}$

2) $b = B\beta + 2C\alpha\beta + D(3\alpha^2\beta - \beta^3) + \text{etc.}$ sey,

woraus die Werthe von α und β, welche der Voraussetzung $f(a + bi) = \alpha + \beta i$ gnügen, als bestimmt hervorgehen.

Wiewohl die bald im Anfange dieses §s. aufgestellte Behauptung nicht vollständig bewährt ist, so sieht man wenigstens, daß sie so viel Allgemeinheit für sich hat, als die möglichen Umkehrungsfälle der Funktionen einräumen. Gäbe es also ein allgemeines, ich meine ein für alle Fälle gültiges Umkehrungstheorem (wofür das La Grangesche wohl nicht gelten dürfte), so wäre die Wahrheit meiner Behauptung unbeschränkt erwiesen.

Anmerk. Bei Funktionen von $(a + bi)$, deren Natur unbezweifelt die Form $\alpha + \beta i$ zuläßt, wäre es, wenn es darauf ankäme α und β wirklich zu finden, in manchen Fällen einfacher und leichter folgendes Verfahren anzuwenden, welches vor dem Mittel, durch Umkehrung der Funktion sich die obigen, oft nicht lösbaren, Gleichungen 1) und 2) zu verschaffen, den Vorzug zu verdienen scheint: Man setze nemlich $f(a + bi) = \alpha + \beta i$ also

$f(a - bi) = \alpha - \beta i$, weil hier nur i in $-i$ übergegangen ist; so giebt die Addition und Division durch 2 $\alpha = \frac{1}{2} f(a + bi) + \frac{1}{2} f(a - bi)$ und die Subtraktion und Multiplikation mit $-\frac{i}{2}$ $\beta = -\frac{i}{2} f(a + bi) + \frac{i}{2} f(a + bi)$.

§. 16.

Hiernach schließt also der vorhergehende §. den Satz in sich, daß jede Operation in Beziehung auf $(a + bi)$ wieder die Form $a + bi$ hervor bringe, wenn sie dem dort näher angezeigten Grade von Allgemeinheit dieses Satzes untergeordnet ist. Einige Beispiele, die zugleich diesen kleinen Traktat beschließen mögen, werden die Sache hier mehr ins Licht stellen. Uebergehen wir indeß die höchst einfachen und sich von selbst darbietenden Reduktionen bei den sogenannten vier Species, so werden dagegen folgende mehr der Beachtung werth scheinen:

1) $(a + bi)^{\alpha + \beta i}$ soll auf die Form $A + Bi$ gebracht werden. — Man setze daher $a = r \operatorname{Cos}\varphi$, $b = r \operatorname{Sin}\varphi$, woraus $r = (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}$ $\operatorname{tng}\varphi = \frac{b}{a}$ folgt; so ist

$$(a + bi)^{\alpha + \beta i} = r^{\alpha + \beta i} \left\{ \text{Cos}\,(\alpha + \beta i)\,\varphi + i\,\text{Sin}\,(\alpha + \beta i)\,\varphi \right\}$$

(siehe §. 6.) und weil $\text{Cos}\,x + i\,\text{Sin}\,x = e^{ix}$ (siehe §. 4.), wenn e die Basis der natürlichen Logarithmen, auch

$$(a + bi)^{\alpha + \beta i} = r^{\alpha + \beta i} \cdot e^{i(\alpha + \beta i)\varphi} = r^{\alpha + \beta i} \cdot e^{-\beta\varphi + \alpha\varphi i} = r\,e^{\alpha - \beta\varphi} \cdot \left(r^{\beta} \cdot e^{\alpha\varphi}\right)^{i}$$

Setzt man nun $r^{\beta} = e^{\gamma}$, woraus $\gamma = \beta$ lognat r folgt, so ist

$$(a + bi)^{\alpha + \beta i} = r^{\alpha} \cdot e^{-\beta\varphi} \cdot e^{(\gamma + \alpha\varphi)i} = r^{\alpha} \cdot e^{-\beta\varphi} \left\{ \text{Cos}\,(\gamma + \alpha\varphi) + i\,\text{Sin}\,(\gamma + \alpha\varphi) \right\}$$

oder wenn man die nöthigen Substitutionen macht,

$$(a + bi)^{\alpha + \beta i} = (a^2 + b^2)^{\frac{\alpha}{2}} \cdot e^{-\beta\,\text{Arc}\left(\text{tng} = \frac{b}{a}\right)} \cdot \text{Cos} \left\{ \log\,(a^2 + b^2)^{\frac{\beta}{2}} + \alpha\,\text{Arc}\left(\text{tng} = \frac{b}{a}\right) \right\}$$

$$+ i\,(a^2 + b^2)^{\frac{\alpha}{2}} \cdot e^{-\beta\,\text{Arc}\left(\text{tng} = \frac{b}{a}\right)} \cdot \text{Sin} \left\{ \log\,(a^2 + b^2)^{\frac{\beta}{2}} + \alpha\,\text{Arc}\left(\text{tng} = \frac{b}{a}\right) \right\}$$

welches die verlangte Form hat.

Anmerk. 1. Abstrahirt davon, daß $\log\,(a^2 + b^2)^{\frac{\beta}{2}}$ nach §. 8. Anmerk. 1. unendlich viele Werthe haben kann, worunter jedoch nur einer möglich, so führt schon der Umstand, daß $\text{Arc}\left(\text{tng} = \frac{b}{a}\right)$ unendlich viele und zwar mögliche Werthe hat, auf die Bemerkung, daß auch $(a + bi)^{\alpha + \beta i}$ unendlich viele Werthe von der Form A + Bi haben müsse. Die unmöglichen Werthe von $\log\,(a^2 + b^2)^{\frac{\beta}{2}}$ würden natürlich noch neue Umformungen erfordern, um $(a + bi)^{\alpha + \beta i} = A + Bi$ zu geben.

Anmerk. 2.

Anmerk. 2. Einzelne diesem untergeordnete Fälle, wie $(a+bi)^{\alpha}$ oder $(a+bi)^{\beta i}$ oder $a^{\alpha+\beta i}$ oder $bi^{\alpha+\beta i}$ u.s.w., erhält man entwickelt, wenn man respektive $\beta = o$, $\alpha = o$, $b = o$, $a = o$ u.s.w. setzt.

2) $\log(a+bi) = \log(r\,\mathrm{Cos}\,\varphi + i\,r\,\mathrm{Sin}\,\varphi) = \log r + \log e^{i\varphi}$ $= \log\sqrt{a^2+b^2} + i\,\mathrm{Arc}\left(\mathrm{tng} = \frac{b}{a}\right)$, wobei die Substitutionen aus der vorhergehenden 1) gebraucht sind. Auch hier giebt es wieder, wegen $\mathrm{Arc}\left(\mathrm{tng} = \frac{b}{a}\right)$, unendlich viele Werthe des Ausdrucks $\log(a+bi)$ von der Form $A + Bi$ (man vergl. hiemit §. 8. Anmerk. 3.)

3) $\mathrm{Sin}\,(a+bi) = \mathrm{Sin}\,a\,\mathrm{Cos}\,bi + \mathrm{Cos}\,a\,\mathrm{Sin}\,bi$. Da nun (nach §. 4.) $\mathrm{Sin}\,x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ und $\mathrm{Cos}\,x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$, so ist

$$\mathrm{Sin}\,(a+bi) = \mathrm{Sin}\,a.\left\{\frac{e^{iib} + e^{-iib}}{2}\right\} + \mathrm{Cos}\,a\left\{\frac{e^{iib} - e^{-iib}}{2i}\right\}$$

$$= \mathrm{Sin}\,a.\left\{\frac{e^{-b} + e^{b}}{2}\right\} - i\,\mathrm{Cos}\,a\left\{\frac{e^{-b} - e^{b}}{2}\right\}$$

Hiernach wäre, wenn man statt a .... 90° — a und statt b .... — b setzte, wodurch man erhält $\mathrm{Sin}\,(90° - a - bi) = \mathrm{Cos}\,(a+bi)$.

4) $$\mathrm{Cos}\,(a+bi) = \mathrm{Cos}\,a\left\{\frac{e^{b} + e^{-b}}{2}\right\} - i\,\mathrm{Sin}\,a\left\{\frac{e^{b} - e^{-b}}{2}\right\}$$

Anmerk. Wie man sieht, hängt es bloß von a ab, $\mathrm{Sin}\,(a+bi)$ oder $\mathrm{Cos}\,(a+bi)$ möglich zu machen; denn für $a = (2n-1)\,90°$ (eine ungerade Anzahl Quadranten) wird $\mathrm{Sin}\,(a+bi) = \frac{1}{2}(-1)^{n+1}.\left\{e^{-b} + e^{b}\right\}$, und

für a = 2n 90° (eine gerade Anzahl Quadranten) wird

$$\mathrm{Cos}\,(a + bi) = \tfrac{1}{2}\,(-1)^{n} \cdot \left\{ e^{b} + e^{-b} \right\}$$

5) $\mathrm{tng}\,(a + bi) = \dfrac{\mathrm{Sin}\,(a + bi)}{\mathrm{Cos}\,(a + bi)}$ findet sich nach einigen leichten Reduktionen $= \dfrac{2\,\mathrm{Sin}\,2a}{(e^{2b} + e^{-2b}) + 2\,\mathrm{Cos}\,2a} + \dfrac{(e^{2b} - e^{-2b})}{(e^{2b} + e^{-2b}) + 2\,\mathrm{Cos}\,2a}.i$

6) $\mathrm{Cotg}\,(a + bi)$, indem man wieder für a ... 90° — a und für b ... — b setzt, $= \dfrac{2\,\mathrm{Sin}\,2a}{(e^{2b} + e^{-2b}) - 2\,\mathrm{Cos}\,2a} - \dfrac{(e^{2b} - e^{-2b}).\,i}{(e^{2b} + e^{-2b})}$

Anmerk. Die Tangente und Cotangente eines unmöglichen Winkels kann hiernach nie möglich werden.

7) $\mathrm{Sec}\,(a + bi) = \dfrac{1}{\mathrm{Cos}\,(a + bi)}$ wird nach der gehörigen Substitution und einer kurzen Reduktion

$$= \frac{2\,(e^{b} + e^{-b})\,\mathrm{Cos}\,a}{(e^{2b} + e^{-2b}) + 2\,\mathrm{Cos}\,2a} + \frac{2\,(e^{b} - e^{-b})\,\mathrm{Sin}\,a\,.\,i}{(e^{2b} + e^{-2b}) + 2\,\mathrm{Cos}\,2a}$$

gefunden.

8) $\mathrm{Cosc}\,(a + bi) = \dfrac{2\,(e^{b} + e^{-b})\,\mathrm{Sin}\,a}{(e^{2b} + e^{-2b}) - 2\,\mathrm{Cos}\,2a} - \dfrac{2\,(e^{b} - e^{-2b})\,\mathrm{Cos}\,a\,.\,i}{(e^{2b} + e^{-2b}) - 2\,\mathrm{Cos}\,2a}$

Anmerk. Die Bedingung der Möglichkeit für die Sekante oder Cosekante eines unmöglichen Winkels ist ganz dieselbe, wie für Cosinus und Sinus.

9) $\log \operatorname{Sin}(a + bi) = ?$ Um diese Reduktion zu machen, darf man nur $\log \operatorname{Sin}(a + bi) = \log(A + Bi)$ setzen und für A und B die in 3) gefundenen Werthe nehmen, welche

$A = \frac{1}{2}(e^{-b} + e^{b}) \operatorname{Sin} a$ und $B = -\frac{1}{2}(e^{-b} - e^{b}) \operatorname{Cos} a$ sind, und diese zuletzt in 3) setzen statt a und b. Dadurch erhält man alsdann

$$\log \operatorname{Sin}(a + bi) = \tfrac{1}{2} \log \left\{ \frac{e^{2b} + e^{-2b} - 2 \operatorname{Cos} 2a}{4} \right\} + i \operatorname{Arc} \left\{ \operatorname{tng} = \frac{(e^{b} - e^{-b})}{(e^{b} + e^{-b})} \operatorname{Cotg} a \right\}$$

Anmerk. Einer von den unendlich vielen Werthen, welche dieser Ausdruck auch selbst dann noch haben kann, wenn $\operatorname{Cotg} a = o$ ist, wird indeß möglich, weil unter dieser Voraussetzung $\operatorname{Arc}(\operatorname{tng} = o)$ folglich auch $i \operatorname{Arc}(\operatorname{tng} = o)$ verschwindet.

Verbesserungen.

Seite 5. Z. 18. v. o. muß bei „Logarithmen," statt des Kommas ein ; stehen.
„ 13. „ 14. v. o. l. statt Besselt — Bessel.